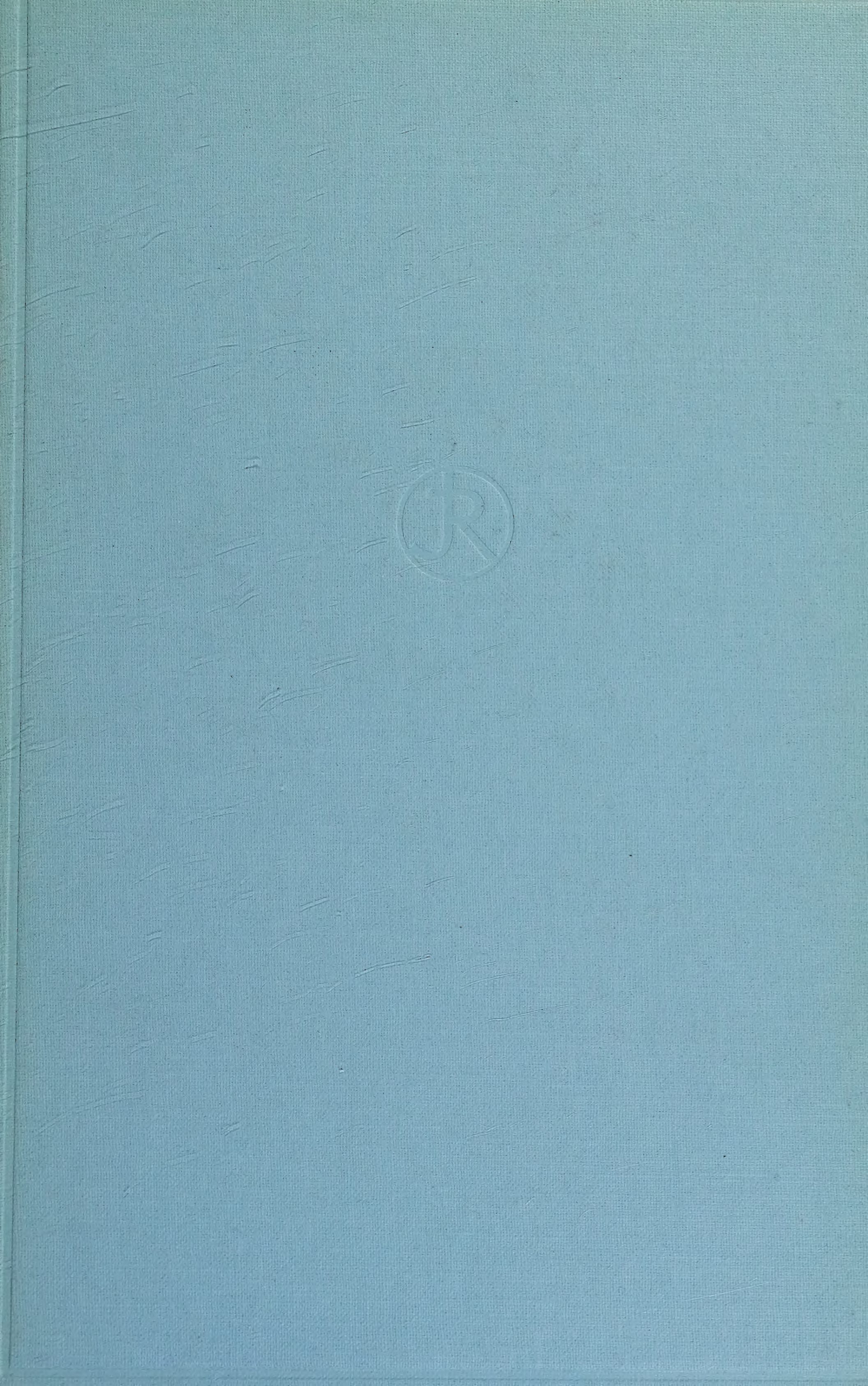






ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 6

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1942

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 3—32 Série mathématique

А. Н. КОЛМОГОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА РАССЕИВАНИЯ И МЕРЫ ТОЧНОСТИ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ НАБЛЮДЕНИЙ

Настоящая статья обязана своим появлением двум обстоятельствам:

1° Предполагая в нескольких дальнейших статьях опубликовать изложение своих точек зрения и исследований по вопросу теоретико-вероятностного обоснования математической статистики, автор считает целесообразным предпослать этим статьям детальный критический разбор существующих методов, проведенный на материале какой-либо достаточно простой классической задачи математической статистики. Для этого было вполне естественно остановиться на задаче оценки параметров Гауссовского закона распределения по данным n независимых наблюдений.

2° К автору обратились с просьбой дать свое заключение по поводу разногласий, имеющихся среди артиллеристов, относительно приемов оценки меры точности по опытным данным (см., например, [10], [11], [12]). В связи с рассмотрением этих разногласий автору стала ясной желательность познакомить артиллеристов с результатами Student'а и Фишера, относящимися к малым выборкам. Этими запросами и определился окончательно конкретный материал настоящей статьи.

Из сказанного ясно, что статья претендует по преимуществу лишь на методологический интерес. Новыми с фактической стороны автору представляются в ней определение исчерпывающей статистики и исчерпывающей системы статистик в § 2 и уточнения остаточных членов в предельных теоремах в § 4.

Необходимость критического сопоставления различных подходов к разбираемым задачам привела неизбежно к тому, что статья получилась довольно объемистой по сравнению с элементарностью разбираемых в ней вопросов.

Введение

Допустим, что случайные величины

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

независимы и подчинены каждая Гауссовскому закону распределения с общим им всем центром рассеивания a и мерой точности h. Как известно, в этом случае n-мерный закон распределения величин x_i определяется следующей плотностью вероятности:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a, h) = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \exp(-h^2 S^2), \tag{1}$$

где

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2. \tag{2}$$

Иногда, вместо формулы (1), удобно пользоваться равносильной ей формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a, h) = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-h^2 S_1^2 - nh^2 (\bar{x} - a)^2\right], \tag{3}$$

где положено

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4}$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{5}$$

Во всех курсах теории вероятностей для артиллеристов рассматриваются следующие три задачи:

I. Предполагая h известным, оценить приближенно по наблюденным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величину a.

II. Предполагая a известным, оценить приближенно по наблюденным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величину h.

III. Определить приближенно по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обе величины a и h.

Практически дело идет при этом о следующем:

a) Требуется указать такие функции $\bar{a}$ и $\bar{h}$ от известных в данной задаче величин (т. е. от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и h в первой задаче, от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и a во второй задаче и только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в третьей задаче), которые наиболее рационально было бы принять за *приближенные значения* оцениваемых величин.

b) Требуется оценить среднюю точность, достигаемую при пользовании приближенными $\bar{a}$ и $\bar{h}$.

c) Иногда требуется, кроме того, указать такие функции a', a'', h' и h'' от известных в данной задаче величин, чтобы, без опасности слишком часто приходить к ошибочным выводам, можно было утверждать, что

$$a' \leqslant a \leqslant a''$$

и, соответственно,

$$h' \leqslant h \leqslant h''.$$

При последней постановке вопроса a' и a'' называются *доверительными границами* для величины a, а h' и h'' — доверительными границами для величины h.

§ 1. Классический метод

Классический метод решения поставленных задач опирается на допущение, что до наблюдения значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подлежащие оценке величины (a — в первой задаче, h — во второй задаче и a и h — в третьей

задаче) подчинены некоторому «априорному» закону распределения вероятностей. Предполагая этот априорный закон распределения известным, можно вычислить условный («апостериорный») закон распределения оцениваемых величин при условии, что результаты наблюдения x_1, $x_2, \ldots, x_n$ известны. Для простоты мы ограничимся случаем, когда априорные законы распределения непрерывны и заданы соответствующими плотностями вероятности.

В первой задаче, применяя теорему Байеса, получим такое выражение условной плотности вероятности для величины a при заданных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\varphi_1(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\exp[-nh^2(a-\bar{x})^2]\,\varphi_1(a)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[-nh^2(a-\bar{x})^2]\,\varphi_1(a)\,da}, \tag{6}$$

где $\varphi_1(a)$ — безусловная (априорная) плотность вероятности для величины a до наблюдений.

Во второй и третьей задаче соответствующие формулы таковы:

$$\varphi_2(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{h^n \exp(-h^2S^2)\,\varphi_2(h)}{\int\limits_{0}^{+\infty} h^n \exp(-h^2S^2)\,\varphi_2(h)\,dh}, \tag{7}$$

$$\varphi_3(a, h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{h^n \exp[-h^2S_1^2 - nh^2(a-\bar{x})^2]\,\varphi_3(a, h)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} h^n \exp[-h^2S_1^2 - nh^2(a-\bar{x})^2]\,\varphi_3(a, h)\,ah\,da}, \tag{8}$$

где $\varphi_2(h)$ и $\varphi_3(a, h)$ — соответствующие безусловные плотности вероятности.

Формулы (6) — (8) непригодны для непосредственного практического применения не только в силу их сложности, но, главным образом, из-за того, что входящие в эти формулы априорные плотности вероятностей нам обычно неизвестны.

Следует, кроме того, ясно представлять себе, что само допущение о *существовании* какого-либо определенного априорного распределения вероятностей для величин a и h может быть оправдано только в применении к тем или иным отдельным, достаточно ограниченным классам случаев. Например, вполне осмысленно говорить о распределении вероятностей для меры точности при стрельбе из винтовки в таких-то определенных условиях для стрелка, вызванного наудачу [1] из данного полка [2]; но бессмысленно было бы говорить об априорном распределении вероятностей для меры точности при стрельбе вообще (в любых условиях и из любого оружия прошлых и будущих времен).

---

[1] Т. е. с одинаковой вероятностью быть вызванным для каждого стрелка.

[2] Каково будет это распределение, зависит от многих обстоятельств. Например, если полк состоит из стрелков двух различных призывов, то распределение может оказаться двухвершинным и т. д.

§ 2. Исчерпывающие статистики и системы статистик

В этом параграфе мы примем, что априорные плотности вероятности $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(h)$ и $\varphi_3(a, h)$ существуют. Из этого чистого допущения о существовании априорных плотностей вероятности нельзя получить практически полезных оценок величин a и h, но можно извлечь некоторые достаточно поучительные следствия общего характера.

В случае первой задачи формула (6) показывает, что условная плотность вероятности $\varphi_1(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полностью определяется априорной плотностью $\varphi_1(a)$, мерой точности h, которая здесь предполагается заданной заранее, и средним значением $\bar{x}$ наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, каково бы ни было априорное распределение вероятностей величины a, в случае известной меры точности h все то новое, что вносят в оценку величины a результаты наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заключено в одной единственной величине $\bar{x}$. Говорят поэтому, что в условиях первой задачи $\bar{x}$ является *исчерпывающей статистикой* для величины a.

Общее определение[3] исчерпывающей статистики (sufficient statistic по-английски) может быть сформулировано так:

Пусть наблюдаемые величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют закон распределения вероятностей, зависящий от параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, значения которых нам неизвестны. Любую функцию

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

от наблюдаемых величин будем называть *статистикой*[4]. Статистика χ называется исчерпывающей для параметра θ_j, если условное распределение вероятностей параметра θ_j при известных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полностью определяется априорным распределением вероятностей параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ и значением статистики χ.

Формула (7) показывает, что во второй задаче S является исчерпывающей статистикой для меры точности h.

Определение исчерпывающей статистики обобщается следующим образом: система функций

$$\chi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\chi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\chi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется *исчерпывающей системой статистик для системы параметров* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ (где $k \leqslant s$, т. е. система $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ образует, вообще говоря, лишь часть полной системы параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$), если условное k-мерное распределение вероятностей для параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ при известных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полностью опре-

[3] Понятие это введено в другой форме Фишером. См. по этому поводу [1], [2] и [3].

[4] Статистика может зависеть от каких-либо параметров, значения которых предполагаются известными (например, от h в первой задаче, или от a во второй задаче). Существенно лишь, чтобы она не зависела от параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, предполагаемых в данной задаче неизвестными.

деляется априорным законом распределения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ и значениями статистик $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$.

Формула (8) показывает, что в третьей задаче величины $\bar{x}$ и S_1 образуют исчерпывающую систему статистик для системы параметров a и h. Для каждого из этих параметров в отдельности система $(\bar{x}, S_1)$, очевидно, также является исчерпывающей [5].

Полученные выше результаты, следуя Фишеру, можно кратко резюмировать так: *вся информация*[6], *заключающаяся в результатах наблюдений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *относительно величин* a *и* h, *определяется в первой задаче значением величины* $\bar{x}$, *во второй задаче величины* S, *а в третьей задаче — двух величин* x *и* S_1.

В соответствии с этим следует считать, что поиски наиболее совершенных методов оценки величин a и h в принятых нами предположениях можно ограничить кругом методов, использующих наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ только в форме вычисления по ним значений $\bar{x}$ — в первой задаче, S — во второй задаче и $\bar{x}$ и S_1 — в третьей задаче.

Например, можно не рассматривать оценку центра рассеивания a по медиане результатов наблюдений, или по среднему из крайних результатов наблюдений

$$d = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}.$$

Интерес подобных методов может заключаться только в их большей простоте [7].

---

[5] Заметим, что одна величина $\bar{x}$ уже не является в третьей задаче исчерпывающей статистикой для параметра a. В самом деле, условная плотность вероятности для a при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражается формулой

$$\varphi(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\int\limits_0^{+\infty} h^n \exp\left[-h^2S_1^2 - nh^2(a-\bar{x})^2\right] \varphi_3(a, h)\, dh}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} h^n \exp\left[-h^2S_1^2 - nh^2(a-\bar{x})^2\right] \varphi_3(a, h)\, dh\, da}.$$

Легко обнаружить, что $\varphi(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не определяется однозначно по $\varphi_3(a, h)$ и $\bar{x}$, а зависит еще существенно от S_1. Можно было бы показать, что вообще среди непрерывных функций $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не существует такой, которая была бы в условиях третьей задачи исчерпывающей статистикой для центра рассеивания a. То же самое относится в условиях третьей задачи и к мере точности h.

Для простоты вычислений мы предположили, что априорные распределения вероятностей для a и h непрерывны и заданы при помощи плотности вероятностей. Однако все выводы относительно исчерпывающих статистик в первой и во второй задаче и исчерпывающей системы статистик в третьей задаче сохраняют свою силу и без этого ограничения.

[6] В другом месте я предполагаю дать точное определение термина «информация», соответствующее принятому Фишером словоупотреблению.

[7] Все это в предположении Гауссовского закона распределения для величин x_i, которое мы приняли с самого начала. Если отказаться от этого допущения, то положение вещей изменится.

Чтобы пояснить это обстоятельство, рассмотрим следующий пример. Будем считать случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимыми и имеющими каждая рав-

В частности, при поисках наиболее рационального вида функций $\bar{a}$, $\bar{h}$, a', a'', h' и h'' (см. о них введение к этой статье) естественно ограничиться в первой задаче функциями $\bar{a}$, a' и a'', зависящими только от x и h, во второй задаче — функциями $\bar{h}$, h' и h'', зависящими только от S и a, в третьей задаче — функциями $\bar{a}$, $\bar{h}$, a' a'', h' и h'', зависящими только от $\bar{x}$ и S_1.

Вывод этот, вполне соответствующий общепринятому мнению практиков, в частности, артиллеристов, можно было бы обосновать и другими способами, совсем не зависящими от допущения о существовании априорных распределений вероятностей для a и h.

§ 3. Гипотеза постоянной априорной плотности вероятности и ее критика

Во многих руководствах, предназначенных для артиллеристов, принимается, что в формулах (6) — (8) можно считать априорные плотности вероятности постоянными, т. е. положить

$$\varphi_1(a) = \text{const}, \quad \varphi_2(h) = \text{const}, \quad \varphi_3 = (a, h) = \text{const}.$$

Строго говоря, это допущение не только произвольно, но и заведомо ошибочно, так как оно противоречит вытекающим из основных принципов теории вероятностей требованиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(a)\,da = 1, \qquad \int_{0}^{+\infty} \varphi_2(h)\,dh = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \varphi_3(a, h)\,dh\,da = 1.$$

В некоторых случаях, однако, постоянство априорных плотностей вероятности может приближенно сохраняться в пределах достаточно

номерное распределение вероятностей на отрезке $\left(a - \frac{1}{2}, \; a + \frac{1}{2}\right)$ Тогда n-мерная плотность вероятности для величин будет такова:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a) = 1, \quad \text{если} \quad x_{\max} - \frac{1}{2} < a < x_{\min} + \frac{1}{2},$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a) = 0, \quad \text{если} \quad a < x_{\max} - \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad a > x_{\min} + \frac{1}{2}.$$

Обозначая через $\varphi(a)$ априорную плотность вероятности для a, получим, по теореме Байеса, такое выражение условной плотности вероятности для a при известных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\varphi(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(a) : \int_{x_{\max}-\frac{1}{2}}^{x_{\min}+\frac{1}{2}} \varphi(a)\,da, \quad \text{если} \quad x_{\max} - \frac{1}{2} < a < x_{\min} + \frac{1}{2},$$

$$\varphi(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{если} \quad a < x_{\max} - \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad a > x_{\min} + \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что здесь исчерпывающей для параметра a будет система двух статистик $x_{\max}$ и $x_{\min}$. В качестве приближенного значения для a в этом случае вполне естественно принять величину

$$d = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}.$$

Можно было бы показать, что разность $a - d$ будет здесь, как правило, значительно меньше при больших n, чем разность $a - \bar{x}$.

большой области изменения аргументов a и h. В этих случаях можно надеяться, что формулы, получающиеся из (6)—(8) при замене функций φ_1, φ_2 и φ_3 постоянными, окажутся приближенно правильными. В § 4 мы увидим, что на такой результат можно рассчитывать при достаточно большом числе наблюдений n, а в случае первой задачи и при малом n, если среднее квадратическое отклонение

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}\,h} \tag{9}$$

достаточно мало по сравнению с a priori допустимой областью изменения центра рассеивания a.

Заменяя в формулах (6)—(8) функции φ_1, φ_2 и φ_3 постоянными, получаем

$$\varphi_1(a\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\sqrt{n}\,h}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-nh^2(a-\bar{x})^2\right], \tag{10}$$

$$\varphi_2(h\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{2S^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,h^n\exp\left(-h^2S^2\right), \tag{11}$$

$$\varphi_3(a, h\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{2\sqrt{n}\,S_1^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,h^n\exp\left[-h^2S_1^2-nh^2(a-\bar{x})^2\right]. \tag{12}$$

Для первой задачи формула (10) приводит к выводу, что условное распределение a при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет гауссовским с центром рассеивания $\bar{x}$ и мерой точности $\sqrt{n}\,h$. Результат этот вполне удовлетворяет своей простотой. Установлен он, однако, как было отмечено, лишь на основе несостоятельного допущения

$$\varphi_1(a)=\text{const}.$$

В § 4 мы увидим, что при некоторых достаточно естественных допущениях он может быть оправдан в качестве приближенного.

Формулы (11) и (12) получены также из несостоятельных допущений

$$\varphi_2(h)=\text{const},\quad \varphi_3(a, h)=\text{const}.$$

Действительно, солидное их обоснование возможно лишь в форме предельной теоремы, устанавливающей, что при некоторых естественных допущениях и *при достаточно большом числе наблюдений* n формулы (11) и (12) приближенно правильны. Однако, в § 4 мы увидим, что при тех же допущениях для больших значений n формулы (11) и (12) могут быть с хорошим приближением заменены значительно более простыми формулами (16) и (17).

Таким образом, оказывается, что при малых n формулы (11) и (12) не обоснованы, а при больших n — излишни. Ввиду этого практического значения формулы (11) и (12) не имеют.

Чтобы проиллюстрировать произвольность результатов, получаемых из гипотезы постоянной априорной плотности вероятности при не слишком больших значениях n, рассмотрим вторую задачу с несколько иной точки зрения. Не менее естественно, чем допущение

$$\varphi_2(h)=\text{const},$$

допущение, что постоянной априорной плотностью вероятности обладает среднее квадратическое уклонение σ. Это допущение приводит к следующим результатам:

$$\varphi_2(h)\,dh = \text{const}\cdot d\sigma,$$

$$\varphi_2(h) = \frac{\text{const}}{h^2},$$

$$\varphi_2(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{2S^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} h^{n-2} \exp(-h^2S^2). \quad (11\ \text{bis})$$

Вычислим по формулам (11) и (11 bis) условное математическое ожидание h при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Получится, соответственно,

$$\bar{h}^* = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) S}, \quad (13)$$

$$\bar{h}^{**} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) S}. \quad (13\ \text{bis})$$

Легко вычислить, что

$$\bar{h}^* = \bar{h}^{**}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (14)$$

Мы видим, что различие между $\bar{h}^*$ и $\bar{h}^{**}$ незначительно при больших n, но может быть весьма заметным при не слишком больших n.

§ 4. Предельные теоремы

В этом параграфе мы установим, что при некоторых естественных допущениях для достаточно большого числа наблюдений n (а в первой задаче в некоторых случаях и при малых n) можно пользоваться приближенными формулами

$$\varphi_1(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{\sqrt{n}\,h}{\sqrt{\pi}} \exp[-nh^2(a-\bar{x})^2], \quad (15)$$

$$\varphi_2(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{\sqrt{2}\,S}{\sqrt{\pi}} \exp[-2S^2(h-\bar{h})^2], \quad (16)$$

$$\varphi_3(a, h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{\sqrt{2n}\,\bar{h}_1 S_1}{\pi} \exp[-n\bar{h}_1^2(a-\bar{x})^2 - 2S_1^2(h-\bar{h}_1)^2], \quad (17)$$

где положено

$$\bar{h} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,S}, \quad (18)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}\,S_1}. \quad (19)$$

Если ввести величины

$$\alpha = \sqrt{n}\,h(a-\bar{x}), \quad (20)$$

$$\chi = \sqrt{2}\,S(h-\bar{h}), \quad (21)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{n}\,\bar{h}_1(a-\bar{x}), \quad (22)$$

$$\chi_1 = \sqrt{2}\,S_1(h-\bar{h}_1), \quad (23)$$

условные плотности вероятностей которых при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны соответственно

$$\psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}\,h} \varphi_1(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (24)$$

$$\psi_2(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}\,S} \varphi_1(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (25)$$

$$\psi_3(\alpha_1, \chi_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2n}\,\bar{h}_1 S_1} \varphi_3(a, h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (26)$$

то формулы (15) — (17) можно переписать в виде

$$\psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2}. \qquad (27)$$

$$\psi_2(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\chi^2}. \qquad (28)$$

$$\psi_3(\alpha_1, \chi_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \frac{1}{\pi} e^{-\alpha_1^2 - \chi_1^2}. \qquad (29)$$

Для обоснования применимости при рассмотрении первой задачи приближенной формулы (27) [или, что то же самое, равносильной с ней формулы (15)] служит такая предельная теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Если априорная плотность вероятности* $\varphi_1(a)$ *имеет ограниченную первую производную и*

$$\varphi_1(\bar{x}) \neq 0,$$

то равномерно относительно α

$$\psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} \left[O1 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)(1 + |\alpha|) \right]. \qquad (30)$$

Здесь $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)$ обозначает величину, имеющую при $nh^2 \to +\infty$ и постоянных $\varphi_1(a)$ и $\bar{x}$ равномерно относительно α порядок, не превышающий $\frac{1}{\sqrt{n}h}$. Для доказательства теоремы заметим, что в силу (6), (20) и (24)

$$\psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{e^{-\alpha^2} \varphi_1\left(\bar{x} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}h}\right)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \varphi_1\left(\bar{x} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}h}\right) d\alpha}. \qquad (31)$$

В силу ограниченности первой производной от $\varphi_1(a)$ имеем равномерно по α

$$\varphi_1\left(\bar{x} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}h}\right) = \varphi_1(\bar{x}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)\alpha.$$

Вставляя эту оценку в (31), и получаем, при условии $\varphi_1(\bar{x}) \neq 0$, после некоторых преобразований, оценку (30).

Не предполагая ограниченности первой производной от $\varphi_1(a)$, а требуя только непрерывности $\varphi_1(a)$ в точке $a = \bar{x}$, можно было бы получить более слабый результат

$$\psi(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\ }} e^{-\alpha^2} + R.$$

где $R \to 0$ при $nh^2 \to +\infty$ равномерно относительно α на любом конечном интервале $\alpha' \leqslant \alpha \leqslant \alpha''$. Наоборот, усиливая предположения о «гладкости» (ограниченности старших производных, аналитичности и т. п.) функции $\varphi_1(a)$, нельзя в оценке (30) заменить множитель $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)$ на какой-либо другой, меньшего порядка. В самом деле, предполагая ограниченность второй производной от $\varphi_1(a)$, мы можем воспользоваться оценкой

$$\varphi_1\left(\bar{x}+\frac{\alpha}{\sqrt{n}h}\right)=\varphi_1(\bar{x})+\varphi'_1(\bar{x})\frac{\alpha}{\sqrt{n}h}+O\left(\frac{1}{nh^2}\right)\alpha^2.$$

Вставив эту оценку в формулу (31), получим после некоторых преобразований

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(\alpha\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}\Big[1 + \frac{\varphi'_1(\bar{x})}{\varphi_1(\bar{x})}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{n}h} + \\ + O\left(\frac{1}{nh^2}\right)(1+\alpha^2)\Big].\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Формула (32) показывает, что при $\varphi'_1(\bar{x}) \neq 0$ и ограниченности второй производной $\varphi''_1(a)$ поправочный член $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)(1+\alpha)$ в формуле (30) для любого фиксированного $\alpha \neq 0$ действительно имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{n}h}$.

Для условного математического ожидания

$$E(a\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{n}h}E(\alpha\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{n}h}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha\,\psi_1(\alpha\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)\,d\alpha$$

величины a при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из (30) вытекает оценка

$$E(a\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar{x}+O\left(\frac{1}{nh^2}\right). \qquad (33)$$

В формуле (33) порядок поправочного члена $O\left(\frac{1}{nh^2}\right)$ не может быть уменьшен ни при каких дополнительных предположениях о «гладкости» функции $\varphi_1(a)$, так как при ограниченности второй производной $\varphi''(a)$ из (32) вытекает

$$E(a\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar{x}+\frac{\varphi'_1(\bar{x})}{2\varphi_1(\bar{x})}\cdot\frac{1}{nh^2}+O\left(\frac{1}{(\sqrt{n}h)^3}\right). \qquad (34)$$

Формула (34) показывает, что при $\varphi'_1(\bar{x}) \neq 0$ и ограниченности $\varphi''_1(a)$ поправочный член в (33) действительно имеет порядок $\frac{1}{nh^2}$.

В силу (33), пренебрегая величинами порядка $\frac{1}{nh^2}$, естественно за приближенное значение центра рассеивания a при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принять $\bar{x}$.

Мерой точности этого приближенного значения можно в силу (15) приближенно считать $\sqrt{n}h$.

Более точно для условного математического ожидания квадрата уклонения $a-\bar{x}$ при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$E[(a-\bar{x})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{1}{nh^2} E(\alpha^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{nh^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\alpha$$

из формулы (30) вытекает оценка[8]

$$E[(a-\bar{x})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{1}{2nh^2}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)\right]. \qquad (35)$$

Считая мерой точности приближенного значения $\bar{\theta}$ какого-либо параметра θ при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величину

$$h(\bar{\theta} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 : \sqrt{2E[(\theta-\bar{\theta})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n]}, \qquad (36)$$

получим для $\bar{x}$ в качестве приближенного к a на основании (35)

$$h(\bar{x} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{n}h\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)\right]. \qquad (37)$$

Чтобы получить доверительные границы для a при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, естественно рассмотреть условные вероятности

$$P\left(|a-\bar{x}| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}h} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = P(|\alpha| \leqslant c \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \int_{-c}^{+c} \psi_1(\alpha \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\alpha.$$

Из (30) для этих вероятностей вытекает оценка[9]

$$P\left(|a-\bar{x}| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}h} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\alpha^2} d\alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right), \qquad (38)$$

где $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)$ обозначает величину, имеющую порядок не больше $\frac{1}{\sqrt{n}h}$ равномерно относительно c. Таким образом, пренебрегая величиной $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}h}\right)$, можно сказать, что при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностью

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\alpha^2} d\alpha \qquad (39a)$$

---

[8] Из (32) можно получить более точную оценку

$$E[(a-\bar{x})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{1}{2nh^2}\left[1+O\left(\frac{1}{nh^2}\right)\right]. \qquad (35')$$

Дальнейшим усилением требований «гладкости» функции $\varphi_1(a)$ порядок остаточного члена в (35′) нельзя уменьшить.

[9] Из (32) можно получить более точную оценку

$$P\left[|a-\bar{x}| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}h} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\alpha^2} d\alpha + O\left(\frac{1}{nh^2}\right). \qquad (38')$$

Дальнейшим усилением требований «гладкости» функции $\varphi_1(a)$ порядок остаточного члена в (38′) нельзя уменьшить.

a — лежит в пределах

$$\bar{x} - \frac{c}{\sqrt{n}\,\bar{h}} \leqslant a \leqslant \bar{x} + \frac{c}{\sqrt{n}\,\bar{h}}. \tag{39b}$$

Для обоснования применимости при рассмотрении второй задачи приближенной формулы (28) [или, что то же самое, равносильной с ней формулы (16)] служит

ТЕОРЕМА II. *Если априорная плотность вероятности* $\varphi_2(h)$ *имеет ограниченную первую производную и* $\varphi_2(\bar{h}) \neq 0$, *то равномерно относительно* χ

$$\psi_2(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\chi^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1 + |\chi|) \right]. \tag{40}$$

Доказательство теоремы II мы здесь не приводим. Оно несколько сложнее, но по идее вполне аналогично доказательству теоремы I. Заметим, что, как и в случае теоремы I, в формуле (40) выражение $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ обозначает величину, имеющую при $\to +\infty$ и постоянных $\varphi_2(h)$ и $\bar{h}$ равномерно относительно χ порядок $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Для условного математического ожидания

$$E(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{h} + \frac{1}{\sqrt{2}S} E(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \bar{h}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} E(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] =$$

$$= \bar{h}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi \psi_2(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\chi\right]$$

из формулы (40) вытекает оценка

$$E(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{h}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{41}$$

В силу (41), пренебрегая относительной ошибкой порядка $\frac{1}{n}$, естественно принять $\bar{h}$ за приближенное значение h. Пренебрежение относительными ошибками порядка $\frac{1}{n}$ с принятой в этом параграфе точки зрения при выборе приближенного значения для h неизбежно, если точное выражение априорной плотности вероятности $\varphi_2(h)$ нам неизвестно. В самом деле, в конце § 3 мы уже видели, что при замене $\varphi_2(h) = \text{const}$ на

$$\varphi_2(h) = \frac{\text{const}}{h^2}$$

относительное изменение $E(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ составляет $\frac{1}{n}$. Легко было бы привести примеры такого же изменения $E(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при изменении $\varphi_2(h)$, в которых функции $\varphi_2(h)$ удовлетворяли бы всем обязательным для плотностей вероятностей требованиям и имели бы ограниченные производные сколь угодно высокого порядка.

Мерой точности приближенного значения $\bar{h}$ величины h можно в силу (16) приближенно считать

$$\sqrt{2}\,S = \frac{\sqrt{n}}{\bar{h}}.$$

Более точно

$$E[(h-\bar{h})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{\bar{h}^2}{2n}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{42}$$

$$h(\bar{h} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 : \sqrt{2E[(h-\bar{h})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n]} = \frac{\sqrt{n}}{\bar{h}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \tag{43}$$

Наконец, из (40) легко вывести, что

$$P\left(|h-\bar{h}| \leqslant \frac{c\bar{h}}{\sqrt{n}} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\chi^2} d\chi + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{44}$$

Пренебрегая величиной $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, можно, следовательно, сказать, что при заданных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностью

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\chi^2} d\chi$$

h лежит в пределах

$$\bar{h}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{n}}\right) \leqslant h \leqslant \bar{h}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{n}}\right).$$

В обстановке третьей задачи имеет место такая теорема:

ТЕОРЕМА III. *Если априорная плотность вероятноти* $\varphi_3(a, h)$ *имеет ограниченные первые производные по* a *и по* h *и* $\varphi_3(\bar{a}, \bar{h}) \neq 0$, *то равномерно относительно* α_1 *и* χ_1

$$\psi_3(\alpha_1, \chi_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi} e^{-\alpha_1^2 - \chi_1^2}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1 + |\alpha_1| + |\chi_1|)\right]. \tag{45}$$

Подобно теореме II, здесь $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ обозначает величину, имеющую при $n \to +\infty$ и постоянных $\varphi_3(a, h)$, $\bar{x}$ и $\bar{h}_1$ равномерно относительно α_1 и χ_1 порядок $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Доказательство теоремы III вполне аналогично доказательству теоремы II. Мы его здесь не приводим.

Из (45) вытекает, что

$$E(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x} + \frac{1}{\bar{h}_1} O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{46}$$

$$E((a-\bar{x})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2n\bar{h}_1^2}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{47}$$

$$P\left(|a-\bar{x}| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}\,\bar{h}_1} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\alpha^2} d\alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{48}$$

$$E(h \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{h}_1\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{49}$$

$$E((h-\bar{h})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\bar{h}_1^2}{2n}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{50}$$

$$P\left(|h-\bar{h}_1| \leqslant \frac{c\bar{h}_1}{\sqrt{n}} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-\chi^2} d\chi + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{51}$$

В силу формул (46) и (49) в третьей задаче, пренебрегая величинами порядка $\frac{1}{n}$, естественно принять в качестве приближенного значения центра рассеивания a величину x, а в качестве приближенного значения меры точности h — величину $\bar{h}_1$. За меру точности этих приближений можно приближенно считать в силу формул (47) и (50), соответственно $\sqrt{n}\,\bar{h}_1$ и $\frac{\sqrt{n}}{\bar{h}_1}$.

Формулы (48) и (51) позволяют найти доверительные границы для a и h, соответствующие (с точностью до величин порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$) заданной вероятности ω.

Как и во второй задаче, условное математическое ожидание $E(h\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется по формуле (49) лишь с точностью до множителя $1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому, с точки зрения, принятой в этом параграфе, лишены смысла споры о том, следует ли принять в качестве приближенного значения h величину $\bar{h}_1$, или же, например, величину

$$\bar{h}_2 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,S_1}. \tag{52}$$

Практическое значение теорем I, II и III не одинаково. По теореме I при постоянном $\varphi_1(a)$ точность приближенных формул (27) и (15) увеличивается не только с увеличением n, но и с увеличением меры точности h. Поэтому, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\,h}$ мало по сравнению с допустимой a priori областью изменения величины a, то мы имеем некоторые основания пользоваться формулами (27) и (15) и при малых n (даже при $n = 1$). В случае же теорем II и III остаточные члены формул (40) и (45) убывают только с возрастанием n. Поэтому при малых n теоремы II и III не дают ничего.

§ 5. Доверительные границы и доверительные вероятности Фишера

Как уже указывалось во введении, задача приближенной оценки параметра θ по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть поставлена, в частности, так: требуется указать в виде двух функций $\theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\theta''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие «доверительные границы» для θ, чтобы на практике можно было пренебрегать возможностью нахождения θ вне интервала[10]

$$\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''.$$

Чтобы судить *при заданных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ о приемлемости тех или иных доверительных границ θ', θ'' для параметра θ естественно обратиться к условной вероятности

$$P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'' \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{53}$$

[10] Интервал $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$ называют «доверительным интервалом» для параметра θ.

Если эта вероятность близка к единице (например, равна 0,99 или 0,999), то будем склонны без больших колебаний принять, что

$$\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''.$$

В соответствии с этим, в тех случаях, когда условные вероятности (53) известны для любых θ' и θ'' естественно поступать так: задаться каким-либо ω, достаточно близким к единице, и для каждой системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подобрать такие значения $\theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\theta''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых

$$P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'' \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega, \tag{54}$$

а длина интервала $(\theta'; \theta'')$ возможно меньше [при условии соблюдения равенства (54)].

Например, в первой задаче, в предположении справедливости формулы (15), наиболее короткий доверительный интервал для a, удовлетворяющий требованию (54), дается формулами (39a) и (39b). Заметим, однако, по поводу этого примера, что формула (15) может быть оправдана (даже в качестве приближенной) лишь при достаточно стеснительных допущениях, выясненных в § 4. В точное же выражение (6) для условной плотности вероятности $\varphi_1(a \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ входит априорная плотность вероятности $\varphi_1(a)$, которая обычно нам неизвестна.

Таково же положение и в большинстве других задач оценки параметров: в точное выражение условных вероятностей (53) обычно входит неизвестное нам распределение вероятностей для параметров.

Существует мнение, отстаиваемое в СССР академиком С. Н. Бернштейном (см., например, [5]), что для случаев, в которых априорное распределение параметров неизвестно, теория вероятностей ничего не может предложить для практического применения, кроме предельных теорем, подобных указанным в § 4. С этой точки зрения при ограниченном числе наблюдений и без знания априорного распределения вероятностей параметров объективный научный подход к наиболее рациональному выбору доверительных границ для оцениваемых параметров вообще невозможен.

В указанной сейчас точке зрения безусловно правильно следующее: зависимость условного распределения вероятностей параметров при известных результатах наблюдения от априорного распределения вероятностей тех же параметров до наблюдения имеет место, и с ней нельзя не считаться. Ошибочно, однако, мнение, что задача указания рациональных доверительных границ для оцениваемых параметров неразрывно связана с рассмотрением условных вероятностей (53).

В большинстве практических (в частности, артиллерийских) задач дело идет об установлении общих правил оценки параметров, рекомендуемых для систематического употребления в какой-либо обширной категории случаев. В этом параграфе, посвященном доверительным интервалам, нас будут занимать правила такого рода:

«При таких-то общих условиях рекомендуется считать, каковы бы ни были результаты наблюдения

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, **что значение параметра θ лежит в пределах** $\theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \theta \leqslant \theta''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$».

Рекомендуя к математическому употреблению в будущем такое правило, мы не можем знать заранее, какие значения будут получать величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в каждом отдельном случае применения этого правила. Поэтому, при решении вопроса о том, следует рекомендовать данное правило или нет, нет никаких оснований обращаться к рассмотрению условных вероятностей (53). Вместо этого, естественно рассмотреть *безусловную вероятность*

$$P[\theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \theta \leqslant \theta''(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{55}$$

того, что при том или ином предстоящем нам применении правила не произойдет ошибки.

Безусловная вероятность (55) при заданном виде функций $\theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\theta''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется, вообще говоря, через закон распределения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, зависящий от параметров $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ и безусловный (априорный) закон распределения этих параметров. Обозначив через

$$P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'' \mid \theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \tag{56}$$

условную вероятность соблюдения неравенства $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$ при заданных значениях параметров и предполагая, что априорное распределение параметров дается плотностью вероятности $\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, получим такое выражение для безусловной вероятности (55):

$$P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'') = \int\int \ldots \int P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'' \mid \theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)\, \varphi(\theta, \theta_1, \theta_2 \ldots \ldots, \theta_s)\, d\theta\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_s. \tag{57}$$

Особенно важным на практике оказывается частный случай таких правил, для которых условная вероятность (56) остается при всех возможных значениях $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ постоянной. Если условная вероятность (56) постоянна и равна ω, то в силу (57)

$$P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'') = \int\int \ldots \int \omega\, \varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)\, d\theta\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_s = \omega,$$

т. е. *безусловная вероятность* (55) *не зависит от безусловного распределения параметров*[11].

Мы уже указывали в § 1, что самая гипотеза о существовании априорного распределения параметров не всегда осмысленна. Однако, если условная вероятность (56) не зависит от значений параметров и постоянно равна одному и тому же числу ω, то естественно считать безусловную вероятность (55) существующей и равной ω даже и в тех случаях, в которых гипотеза о существовании априорного распределения параметров не принимается[12].

---

[11] Мы получили этот результат лишь в случае безусловных распределений параметров, заданных плотностью вероятности $\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Однако легко видеть, что он верен и в общем случае.

[12] В этом случае дело идет о принятии такой новой **аксиомы** теории вероятностей: если условная вероятность $P(A \mid \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ некоторого события A при

Если условная вероятность (56) при всех возможных значениях параметров [а следовательно, и безусловная вероятность (55), независимо от вида априорного распределения параметров] равна ω, то будем говорить, следуя Фишеру (см. [1] и [2]), что наше правило имеет определенную *доверительную вероятность*, равную ω.

В случае первой из трех задач, которым посвящена настоящая статья, легко видеть, что правило, рекомендующее считать a заключенным в пределах

$$a' \leqslant a \leqslant a'', \tag{58}$$

где

$$a' = \bar{x} + \frac{c'}{\sqrt{n}\,h}, \quad a'' = \bar{x} + \frac{c''}{\sqrt{n}\,h} \tag{59}$$

имеет определенную доверительную вероятность

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c'}^{c''} e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \tag{60}$$

В самом деле, каковы бы ни были a и h,

$$P\left(a' \leqslant a \leqslant a'' \,\middle|\, a, h\right) = P\left(\bar{x} + \frac{c'}{\sqrt{n}\,h} \leqslant a \leqslant \bar{x} + \frac{c''}{\sqrt{n}\,h} \,\middle|\, a, h\right) =$$

$$= P\left(a - \frac{c''}{\sqrt{n}\,h} \leqslant \bar{x} \leqslant a - \frac{c'}{\sqrt{n}\,h} \,\middle|\, a, h\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c''}^{-c'} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c'}^{c''} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Положив, например,

$$c' = -2, \quad c'' = +2,$$

получим

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 0{,}9953.$$

Таким образом, правило, рекомендующее считать, что

$$|a - \bar{x}| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}\,h}, \tag{61}$$

обладает доверительной вероятностью $\omega = 0{,}9953$. Чтобы окончательно выяснить смысл и практическое значение понятия доверительной вероятности, остановимся на этом примере несколько подробнее. Пусть мы имеем в виду применить правило (61) в какой-либо последовательности случаев

$$E_1, E_2, \ldots, E_N.$$

всех возможных значениях параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ существует и равна одному и тому же числу ω, то безусловная вероятность $P(A)$ события A существует и равна ω.

Заметим, что при сравнении излагаемого сейчас метода с классическим вопроса о приемлемости этой новой аксиомы не возникает, так как классический метод необходимым образом опирается на допущение существования априорного распределения параметров, а при этом допущении указанная новая аксиома делается излишней.

Каждому случаю E_k соответствуют свои значения a_k, h_k и n_k, но совершенно независимо от того, каковы эти значения, вероятность осуществления в случае E_k неравенства

$$|\bar{x}_k - a_k| \leq \frac{2}{\sqrt{n_k}\, h_k} \tag{61$_k$}$$

равна $\omega = 0{,}9953$. Если при этом системы величин x_i, соответствующие различным случаям E_k, независимы друг от друга, то независимы между собой и события A_k, заключающиеся в осуществлении соответствующих неравенств (61_k). При этом условии для достаточно большого N частота $\frac{M}{N}$, с которой в ряду случаев E_k будут осуществляться неравенства (61_k), будет по теореме Бернулли с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличаться от $\omega = 0{,}9953$. Следовательно, в любом достаточно длинном ряду независимых случаев E_k мы получим, руководствуясь правилом (61), верные результаты приблизительно в $99\frac{1}{2}\,\%$ случаев, а ошибочные — приблизительно в $\frac{1}{2}\,\%$ случаев. Для обоснованности этого вывода требуется только, чтобы подлежащее рассмотрению множество случаев

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_N$$

было определено заранее независимо от рассмотрения получающихся в результате наблюдения значений величин x_i. Остроумный пример недоразумений, которые могут произойти, если не обратить внимания на это обстоятельство, был указан С. Н. Бернштейном[13].

После всего сказанного ранее кажется почти излишним предостерегать читателя от распространенной ошибки[14], указав, что из того, что при всех возможных значениях a и h

$$P\left(|a - \bar{x}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}\, h} \mid a, h\right) = 0{,}9953$$

вытекает равенство

$$P\left(|a - \bar{x}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}\, k}\right) = 0{,}9953$$

для безусловной вероятности осуществления неравенства $|a - \bar{x}| \leq \leq \frac{2}{\sqrt{n}\, h}$, но отнюдь не следует, что

$$P\left(|a - \bar{x}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}\, h} \mid x_1 x_2, \ldots, x_n\right) = 0{,}9953$$

при любых фиксированных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

[13] См. [5], § 7. По поводу этого примера возникает любопытная задача—дать такое правило отбора ящиков, которое гарантировало бы покупателю с достаточно малым риском ошибки получение не менее 95% ящиков, удовлетворяющих его требованию $|a_i - a| < 2$. Задача эта допускает вполне корректную трактовку с точки зрения доверительных вероятностей (или, точнее, коэффициентов доверия, о которых см. в конце этого параграфа). К этой задаче и некоторым аналогичным задачам, имеющим серьезное практическое значение, я предполагаю вернуться в другой статье.

[14] Ошибку эту допускал в некоторых своих работах Фишер.

Заметим в заключение этого параграфа, что иногда приходится рассматривать правила установления доверительных границ подлежащего оценке параметра θ, не имеющие определенной доверительной вероятности. В таких случаях роль, аналогичную доверительной вероятности, играет нижняя грань

$$\omega = \inf P(\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta'' \mid \theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

условной вероятности соблюдения неравенств $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''$ при различных комбинациях значений параметров $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Эта нижняя грань называется, следуя J. Neyman'у, **коэффициентом доверия** данного правила[15].

§ 6. Рациональный выбор доверительных границ, соответствующих заданной доверительной вероятности

После сказанного в предыдущем параграфе становится понятной такая постановка задачи оценки параметра θ по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$: для каждого ω $(0 < \omega < 1)$ требуется найти в виде функций θ'_ω и θ''_ω от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (и в случае необходимости, от параметров, предполагаемых в данной задаче известными) такие доверительные границы для θ, чтобы правило, рекомендующее считать, что

$$\theta'_\omega \leqslant \theta \leqslant \theta''_\omega$$

имело доверительную вероятность, равную ω.

Поставленная таким образом задача не всегда разрешима. В случае ее неразрешимости приходится обращаться к правилам оценки параметра θ, лишенным определенной доверительной вероятности, и пользоваться указанным в конце предыдущего параграфа понятием коэффициента доверия. С другой стороны, во многих случаях поставленная задача допускает при каждом ω не одно, а много решений. Естественно среди этих решений, соответствующих данному ω, предпочитать те, которые приводят к более коротким доверительным интервалам $[\theta'_\omega; \theta''_\omega]$. Общему рассмотрению вопроса о разыскании таких «наиболее эффективных» правил, обладающих заданной доверительной вероятностью (или заданным коэффициентом доверия), я предполагаю посвятить другую статью.

В случае трех задач, которым посвящена настоящая статья, естественны следующие упрощения постановки вопроса о разыскании рациональных доверительных границ для a и h:

1. Естественно ограничиться рассмотрением доверительных границ, зависящих при данных n и ω, помимо параметров, предполагаемых в данной задаче известными, только от соответствующих достаточных статистик, или достаточных систем статистик. В силу этого мы будем считать, что в первой задаче доверительные границы a' и a'' зависят

[15] Пример элементарной задачи, в которой неизбежно пользоваться правилами, не имеющими определенной доверительной вероятности, а обладающими только определенным коэффициентом доверия, см. в [8].

только от h и $\bar{x}$, во второй задаче доверительные границы h' и h'' зависят только от a и S, а в третьей задаче a', a'', h' и h'' зависят только от $\bar{x}$ и S_1.

2. Естественно желать[16], чтобы правила определения доверительных границ были инвариантны по отношению к изменению масштаба, начала отсчета и выбора положительного направления на оси x = ов, т. е. по отношению к образованиям

$$x^* = kx + b, \tag{62}$$

где b — произвольное действительное число, а k — произвольное действительное число, отличное от нуля. При преобразовании (62) a, h, $\bar{x}$, S и S_1 преобразуются по формулам

$$a^* = ka + b,\ \ h^* = \frac{h}{|k|},\ \ \bar{x}^* = k\bar{x} + b,\ \ S^* = |k|S,\ \ S_1^* = |k|S_1.$$

Выдвинутое сейчас требование инвариантности сводится к тому, чтобы a', a'', h' и h'' при фиксированных n и ω как функции аргументов, предусмотренных выше в требовании 1, при всех действительных $k \neq 0$ и b удовлетворяли таким соотношениям:

в первой задаче

$$a'(h^*, \bar{x}^*) = ka'(h, \bar{x}) + b, \quad a''(h^*, \bar{x}^*) = ka''(h, \bar{x}) + b,$$

во второй задаче

$$h'(a^*, S^*) = \frac{h'(a, S)}{|k|}, \quad h''(a^*, S^*) = \frac{h''(a, S)}{|k|},$$

в третьей задаче

$$a'(\bar{x}^*, S_1^*) = ka'(\bar{x}, S_1) + b, \quad a''(\bar{x}^*, S_1^*) = ka''(\bar{x}, S_1) + b,$$

$$h'(\bar{x}^*, S_1^*) = \frac{h'(\bar{x}, S_1)}{|k|}, \qquad h''(\bar{x}^*, S_1^*) = \frac{h''(x_1, S_1)}{|k|}.$$

Из требований 1 и 2 можно вывести, что доверительные границы должны иметь следующий вид:

в первой задаче

$$a' = \bar{x} - \frac{A_0}{h}, \qquad a'' = \bar{x} + \frac{A_0}{h}, \tag{63}$$

во второй задаче

$$h' = \frac{B'}{S},\ \ h'' = \frac{B''}{S}, \tag{64}$$

в третьей задаче

$$a_1' = \bar{x} - C_0 S_1, \qquad a_1'' = \bar{x} + C_0 S_1, \tag{65}$$

$$h_1' = \frac{B_1'}{S_1},\ \ h_1'' = \frac{B_1''}{S_1}, \tag{66}$$

где A_0, B', B'', C_0, B_1' и B_1'', при фиксированном n, зависят только от ω.

Если положить

$$A = h(a - \bar{x}), \tag{67}$$

$$B = hS, \tag{68}$$

[16] Это требование я заимствую из работ К. В. Бродовицкого [8] и [9]. Во избежание недоразумений считаю нужным отметить, что основное содержание этих работ я считаю ошибочным.

$$C = \frac{a - x}{S_1}, \tag{69}$$

$$B_1 = hS_1, \tag{70}$$

то легко видеть, что неравенства

$$a' \leqslant a \leqslant a'',$$
$$h' \leqslant h \leqslant h'',$$
$$a_1' \leqslant a \leqslant a_1'',$$
$$h_1' \leqslant h \leqslant h_1''$$

соответственно равносильны неравенствам

$$-A_0 \leqslant A \leqslant +A_0,$$
$$B' \leqslant B \leqslant B'',$$
$$-C_0 \leqslant C \leqslant +C_0,$$
$$B_1' \leqslant B_1 \leqslant B_1''.$$

Решающим обстоятельством для успеха всего дальнейшего является то обстоятельство, что *законы распределения величин A, B, C и B_1, вычисленные при фиксированных a и h на основании формулы* (1), *оказываются независимыми от a и h.* Эти законы распределения определяются такими плотностями вероятностей:

$$f_1(A) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-nA^2}, \tag{71}$$

$$f_2(B) = \frac{B^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-B^2}, \tag{72}$$

$$f_3(C) = \frac{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 + nC^2)^{-\frac{n}{2}}, \tag{73}$$

$$f_4(B_1) = \frac{B_1^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-B_1^2}. \tag{74}$$

В силу этого обстоятельства вероятности

$$P(a' \leqslant a \leqslant a'' \mid a, h) = P(-A_0 \leqslant A \leqslant +A_0 \mid a, h),$$
$$P(h' \leqslant h \leqslant h'' \mid a, h) = P(B' \leqslant B \leqslant B'' \mid a, h),$$
$$P(a_1' \leqslant a \leqslant a_1'' \mid a, h) = P(-C_0 \leqslant C \leqslant +C_0 \mid a, h),$$
$$P(h_1' \leqslant h \leqslant h_1'' \mid a, h) = P(B_1' \leqslant B \leqslant B_1'' \mid a, h)$$

оказываются независимыми от a и h, что позволяет их считать доверительными вероятностями в смысле определения предыдущего параграфа. Вычисляя эти вероятности по формулам (71)—(74) и приравнивая их ω, получим

$$\omega = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{A_0} e^{-nA^2} dA = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} d\alpha, \tag{75}$$

$$\omega = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{B'}^{B''} B^{n-1} e^{-B^2} dB = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi'}^{\chi''} \chi^{n-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi, \tag{76}$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{C_0} (1+nC^2)^{-\frac{n}{2}} dC =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\gamma_0} \left(1+\frac{\gamma^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} d\gamma, \qquad (77)$$

$$\omega = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_{B_1'}^{B_1''} B_1^{n-2} e^{-B_1^2} dB_1 = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_{\chi_1'}^{\chi_1''} \chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi. \qquad (78)$$

Ради возможности использовать непосредственно имеющиеся таблицы мы положили здесь

$$\alpha_0 = \sqrt{n} A_0,$$
$$\chi' = \sqrt{2} B', \quad \chi'' = \sqrt{2} B'',$$
$$\gamma_0' = \sqrt{n(n-1)}\, C_0,$$
$$\chi_1' = \sqrt{2} B_1', \quad \chi_1'' = \sqrt{2} B_1'',$$

что в соединении с (63)—(66) дает

$$a' = \bar{x} - \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}h}, \qquad a'' = \bar{x} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}h}, \qquad (79)$$

$$h' = \frac{\chi'}{\sqrt{2}S}, \qquad h'' = \frac{\chi''}{\sqrt{2}S}, \qquad (80)$$

$$a_1' = \bar{x} - \frac{\gamma_0 S_1}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad a_1'' = \bar{x} + \frac{\gamma_0 S_1}{\sqrt{n(n-1)}}, \qquad (81)$$

$$h_1' = \frac{\chi_1'}{\sqrt{2}S_1}, \qquad h_1'' = \frac{\chi_1''}{\sqrt{2}S_1}. \qquad (82)$$

При этих обозначениях доверительные границы для a и h даются следующими неравенствами:

в первой задаче

$$|a - \bar{x}| \leqslant \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}h}, \qquad (83)$$

во второй задаче

$$\frac{\chi'}{\sqrt{2}S} \leqslant h \leqslant \frac{\chi''}{\sqrt{2}S}, \qquad (84)$$

в третьей задаче

$$|a - \bar{x}| \leqslant \frac{\gamma_0 S_1}{\sqrt{n(n-1)}}, \qquad (85)$$

$$\frac{\chi_1'}{\sqrt{2}S_1} \leqslant h \leqslant \frac{\chi_1''}{\sqrt{2}S_1}. \qquad (86)$$

α_0, χ', χ'', γ_0, χ_1' и χ_1'' должны быть при этом подобраны так, чтобы удовлетворялись соотношения (75)—(78). α_0 и γ_0 определяются этим требованием по заданной доверительной вероятности однозначно, выбор же χ', χ'', χ_1' и χ_1'' остается в некоторой мере произвольным (см. по этому поводу § 8).

§ 7. Практические выводы для оценки центра рассеивания

Из рассмотрений предыдущего параграфа вытекают следующие правила:

I. *В первой задаче с доверительной вероятностью* ω *можно считать, что*

$$|a-\bar{x}| \leqslant \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}h},$$

где α_0 *определяется из равенства*

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

II. *В третьей задаче с доверительной вероятностью* ω *можно считать, что*

$$|a-\bar{x}| \leqslant \frac{\gamma_0 S_1}{\sqrt{n(n-1)}},$$

где γ_0 *определяется из равенства*

$$\omega = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\gamma_0} \left(1+\frac{\gamma^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} d\gamma.$$

Приведем здесь таблицу зависимости γ_0 от ω при различных n, извлеченную из более полной таблицы, имеющейся, например, в [1].

n	$\omega = 0{,}5$	$\omega = 0{,}8$	$\omega = 09$	$\omega = 0{,}95$	$\omega = 0{,}98$	$\omega = 0{,}99$
2	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
3	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
4	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
5	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
6	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
7	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
8	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
9	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
10	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

В последней строке этой таблицы приведены предельные значения γ_0 при $n \to \infty$, получающиеся из формулы

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma^0} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma. \tag{87}$$

Заметим, что выведенная в § 4 формула (48) равносильна формуле

$$P\left(|a-\bar{x}| \leqslant \frac{\gamma S_1}{\sqrt{n(n-1)}} \,\Big|\, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{88}$$

Теперь мы можем оценить, насколько опасно при небольших n пренебрежение остаточным членом $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Пренебрегая этим членом, мы

пришли бы например, к выводу (указываемому часто в учебниках), что с вероятностью 0,99 можно ожидать выполнения неравенства

$$|a-\bar{x}| \leqslant \frac{2{,}576\, S_1}{\sqrt{n(n-1)}}\,. \tag{89}$$

В действительности же, например, при $n=5$, неравенство (89) будет нарушаться приблизительно в 6% случаев, а для того, чтобы гарантировать 1% нарушений, следует в соответствии с нашей таблицей пользоваться неравенством

$$|a-\bar{x}| \leqslant \frac{4{,}604\, S_1}{\sqrt{n(n-1)}}\,.$$

Лишь при $n>30$ считается на практике вполне допустимым пользоваться предельной формулой (87).

Естественно, что при пользовании сформулированными в этом параграфе правилами полезно помнить замечания, приведенные в конце § 5, по поводу смысла понятия доверительной вероятности.

§ 8. Выбор доверительных границ для меры точности

Условия (76) и (78) оставляют еще некоторый произвол в выборе χ', χ'', χ_1' и χ_1''. Естественно при заданном ω выбирать χ', χ'', χ_1' и χ_1'' так, чтобы длина интервалов $[\chi', \chi'']$ и $[\chi_1', \chi_1'']$ была возможно меньше [при условии соблюдения соотношений (76) и (78)]. При этом дополнительном условии χ', χ'', χ_1' и χ_1'' определяются по ω и n однозначно.

Однако, ввиду отсутствия соответствующих таблиц, фактическое вычисление определяемых этим условием значений χ', χ'', χ_1' и χ_1'' довольно затруднительно. Поэтому на практике, вместо разыскания наиболее коротких доверительных интервалов (χ', χ'') и (χ_1', χ_1''), соответствующих заданной доверительной вероятности ω, достигают соблюдения условий (76) и (78), определяя χ', χ'', χ_1' и χ_1'' из равенств

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\chi'}\chi^{n-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi=\frac{1-\omega}{2}\,, \\ \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{\chi''}^{+\infty}\chi^{n-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi=\frac{1-\omega}{2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\chi_1'}\chi^{\;-2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi=\frac{1-\omega}{2}\,, \\ \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{\chi_1''}^{+\infty}\chi^{n-}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d\chi=\frac{1-\omega}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Для этой цели пользуются имеющимися таблицами[17] зависимости между χ^2 и

[17] См. например [7].

$$P_k(\chi) = \frac{1}{2^{\frac{k-2}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{\chi}^{+\infty} \chi^{k-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi.$$

При $n > 30$ можно пользоваться предельными формулами

$$\chi' = \sqrt{n} - c, \qquad \chi'' = \sqrt{n} + c, \tag{92}$$

$$\chi_1' = \sqrt{n-1} - c, \quad \chi_1'' = \sqrt{n-1} + c. \tag{93}$$

где c определяется из условия

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-z^2} dz.$$

Заметим еще, что из (92), (93), (80), (82), (18) и (19) вытекает

$$h' = \bar{h}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{n}}\right), \qquad h'' = \bar{h}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{n}}\right); \tag{94}$$

$$h_1' = \bar{h}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{n-1}}\right), \quad h_1'' = \bar{h}_1\left(1 + \frac{c}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{95}$$

Сопоставляя эти формулы с (44) и (51), мы видим, что и здесь *при больших n* доверительные границы, полученные по методу Фишера, в существенном совпадают с получаемыми на основе предельных теорем из § 4.

§ 9. Рациональный выбор приближенных значений оцениваемых параметров

Часто, вместо доверительных границ для оцениваемого параметра θ, соответствующих заданной доверительной вероятности ω, бывает желательно иметь одно приближенное значение $\bar{\theta}$ этого параметра. Задача наиболее рационального выбора такого приближенного значения, соответствующего данным результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, может быть поставлена многими различными способами.

С точки зрения классического метода (см. § 1 и § 4) наиболее естественно принять за приближенное значение условное математическое ожидание

$$\bar{\theta} = E(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{96}$$

В самом деле, легко показать, что такой выбор обращает в минимум условное математическое ожидание

$$E\left[(\theta - \bar{\theta})^2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$$

квадрата уклонения θ от $\bar{\theta}$, т. е. доставляет нам максимальное возможное значение меры точности $h(\bar{\theta} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемой по формуле (36).

В § 4 было показано, что с этой точки зрения при некоторых естественных допущениях относительно априорных распределений вероятностей величин a и h для больших n (или nh^2 в случае первой задачи) можно считать приближенным значением a величину $\bar{x}$, приближенным значением h во второй задаче — $\bar{h}$, а в третьей задаче — $\bar{h}_1$

Вместо величин $\bar x$, h и $\bar h_1$ за приближенные значения a и h могут быть, однако, с точки зрения § 4 приняты и любые другие величины $\bar x^*$, $\bar h^*$ и $\bar h_1^*$, удовлетворяющие следующим требованиям:

в случае первой задачи

$$\bar x^* = \bar x + O\left(\frac{1}{nh^2}\right),$$

во второй задаче

$$\bar h^* = \bar h\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

в третьей задаче

$$\bar x^* = \bar x + \frac{1}{\bar h_1} O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \bar h_1^* = \bar h_1\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Эта неопределенность результата лежит в существе дела, если относительно априорных распределений величин a и b принимаются лишь качественные допущения их достаточной «гладкости».

Если основной задачей при оценке параметра θ считается указание для каждого ω $(0 < \omega < 1)$ доверительных границ θ'_ω и θ''_ω, соответствующих доверительной вероятности (или коэффициенту доверия) ω, то обычно определяют θ'_ω и θ''_ω так, чтобы при $\omega' > \omega$ было

$$\theta'_\omega \leqslant \theta'_{\omega'} \leqslant \theta''_{\omega'} \leqslant \theta''_\omega.$$

При соблюдении этого условия обычно оказывается, что при $\omega \to 0$ нижняя и верхняя границы θ'_ω и θ''_ω стремятся к общему пределу $\bar\theta$ (первая снизу, а вторая сверху). Этот общий предел естественно в таком случае считать приближенным значением θ, так как лишь такое соглашение может обеспечить неравенство

$$\theta'_\omega \leqslant \bar\theta \leqslant \theta''_\omega$$

при всех ω. С этой точки зрения, приняв выбор доверительных границ для a и h, указанный в §§ 7—8, следует считать за приближенное значение a величину $\bar x$, а за приближенное значение h во второй задаче величину $\bar h^*$, определяемую равенствами

$$\bar h^* = \sqrt{2}\, S \bar\chi^*, \quad \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\bar\chi^*} \chi^{n-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = \frac{1}{2}, \tag{97}$$

а в третьей задаче величину $\bar h_1^*$, определяемую из равенств

$$\bar h_1^* = \sqrt{2}\, S_1 \bar\chi_1^*, \quad \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\bar\chi_1^*} \chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = \frac{1}{2}. \tag{98}$$

Приведем здесь значения $(\bar\chi^*)^2$ для $n \leqslant 20$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(\bar\chi^*)^2$	0,455	1,386	2,366	3,357	4,357	5,351	6,346	7,344	8,343	9,342

Для $n > 10$ с ошибкой меньше, чем в 0,01, можно считать

$$(\bar{\chi}^*)^2 \backsim n - \frac{2}{3}. \tag{99}$$

$\bar{\chi}_1^*$ при n наблюдениях равно $\bar{\chi}^*$, соответствующему $n-1$ наблюдению[18].

Если рассматривать задачу выбора приближенных значений a и h самоё по себе, то естественно все же ограничиться приближенными значениями, удовлетворяющими следующим двум условиям[19]:

1) приближенные значения в каждой задаче зависят, помимо параметров, предполагаемых в данной задаче известными, только от соответствующих достаточных статистик, или достаточных систем статистик;

2) приближенные значения инвариантны по отношению к преобразованиям оси x-ов вида

$$x^* = kx + b.$$

Из требований 1) и 2) можно вывести, что *в качестве приближенного значения для a можно взять только величину $\bar{x}$, а приближенное значение для h должно иметь во второй задаче вид*

$$\bar{h} = \frac{\bar{B}}{S}$$

и в третьей задаче — вид

$$\bar{h}_1 = \frac{\bar{B}_1}{S},$$

где $\bar{B}$ и $\bar{B}_1$ зависят только от n.

Для определения наиболее рационального значения множителей B и B_1 можно воспользоваться различными дополнительными условиями. Например, можно потребовать, чтобы при любых значениях a и h выполнялись условия

$$E(\bar{h} \mid a, h) = h, \quad E(\bar{h} \mid a, h) = h.$$

Эти требования можно удовлетворить, только положив

$$\bar{B} = \tilde{B}_1, \qquad B = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \qquad \bar{B}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

т. е. приняв

$$\bar{h} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) S}, \qquad \bar{h}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S}. \tag{100}$$

Мы увидим вскоре, что не следует переоценивать окончательность последнего результата.

Использованное нами выше требование **отсутствия систематической ошибки** можно сформулировать для приближенного значения $\bar{\theta}$ любого интересующего нас параметра θ. В общей форме это требование выглядит так: для всех возможных значений параметров

---

[18] Приведенный сейчас выбор приближенных значений $\bar{h}^*$ и h^*_1 для h связан с тем способом определения доверительных границ для h, который указан в § 8 и который отнюдь не является единственно возможным, ни даже наилучшим с какой-либо достаточно обоснованной точки зрения.

[19] Ср. условия, наложенные на a', a'', h' и h'' в § 6.

$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ данной задачи должно соблюдаться равенство

$$E(\bar{\theta} \mid \theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = \theta. \tag{101}$$

Приближение $\bar{x}$ для центра рассеивания a удовлетворяет этому требованию как в первой, так и в третьей задаче. Мы найдем сейчас приближения, лишенные систематической ошибки для среднего квадратического уклонения

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2h}}.$$

Естественно ограничиться здесь приближениями вида

$$\bar{\sigma} = kS$$

во второй задаче и вида

$$\bar{\sigma}_1 = k_1 S_1$$

в третьей задаче[20]. Требование отсутствия систематической ошибки

$$E(\bar{\sigma} \mid a, h) = \sigma, \quad E(\bar{\sigma}_1 \mid a, h) = \sigma$$

приводит тогда к необходимости принять

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{2}}, \qquad k_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2}},$$

т. е. положить

$$\bar{\sigma} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{2}}, \qquad \bar{\sigma}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) S_1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2}}. \tag{102}$$

Но приняв (102), естественно в качестве приближений к h брать соответственно (во второй и в третьей задаче)

$$\bar{h} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S}, \qquad \bar{h}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) S_1}. \tag{100 bis}$$

Если требовать отсутствия систематической ошибки в определении величины σ^2 (дисперсии) и искать приближения к σ^2 в виде

$$\bar{\sigma}^2 = qS^2$$

во второй задаче и в виде

$$\bar{\sigma}_1^2 = q_1 S_1^2$$

в третьей задаче, то приходится принять

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{n}, \quad q_1 = \frac{1}{n-1}, \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{S^2}{n}, \quad \bar{\sigma}^1 = \frac{S_1^2}{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Для соответствия с формулой (103) естественно тогда считать приближенными значениями h соответственно (во второй и в третьей задаче)

$$\bar{h} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,S}, \qquad \bar{h}_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}\,S_1}. \tag{100 ter}$$

Последние приближения наиболее приняты в современной математической статистике. Ими мы пользовались в предыдущем изложении § 4,

[20] Такой вид приближений для σ вытекает из сформулированных выше допущений 1) и 2).

в котором выбор между вариантами (100), (100 bis) и (100 ter) был, однако, не существенным (так как при любом из них сохраняются предельные теоремы § 4).

С практической точки зрения различие между (100), (100 bis) и (100 ter) несущественно в тех случаях, когда дело идет о единичном определении меры точности h по группе наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В самом деле, при этом различия между приближениями (100), (100 bis) и (100 ter) имеют порядок $\frac{h}{n}$, а их отклонения от истинного значения h — больший порядок $\frac{h}{\sqrt{n}}$. Поэтому, имея возможность определить h лишь с точностью до отклонений порядка $\frac{h}{\sqrt{n}}$, мы можем пользоваться почти с одинаковым успехом приближениями, отличающимися друг от друга лишь на величины порядка $\frac{h}{n}$.

Совершенно иначе дело обстоит, если предстоит произвести большое число определений различных мер точности (например, соответствующих разным условиям стрельбы), каждое из которых делается на основании небольшого числа наблюдений. В этом случае может оказаться весьма существенным, чтобы та или иная величина, вычисляемая на основании приближенного значения меры точности, определялась без систематической ошибки.

В зависимости от того, является ли этой величиной, например, h, σ или σ^2, следует определять приближенные значения для h по формулам (100), (100 bis) или (100 ter).

В частности, с точки зрения артиллериста, по мнению проф. П. А. Гельвиха (см. [10] и [11]), наиболее существенно определять без систематической ошибки математическое ожидание расхода снарядов, необходимого для поражения цели. В наиболее типичных случаях (двумерное рассеяние и цель малых размеров по сравнению с рассеянием) математическое ожидание расхода снарядов, по П. А. Гельвиху, пропорционально произведению

$$\sigma^{(1)} \sigma^{(2)}$$

средних квадратических уклонений по двум направлениям. Допустим, что для оценки $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ мы пользуемся приближениями $\bar{\sigma}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$, полученными, соответственно, на основании результатов наблюдений

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n(1)}^{(1)} \quad \text{и} \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n(2)}^{(2)}.$$

Если $x_i^{(1)}$ независимы от $x_j^{(2)}$, то при любых $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ (где $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ центры рассеивания, соответственно, для $x_i^{(1)}$ и $x_j^{(2)}$) для произведения $\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\sigma}^{(2)}$ приближений $\bar{\sigma}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$ имеем

$$E(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\sigma}^{(2)} \mid a^{(1)}, a^{(2)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = E(\bar{\sigma}^{(1)} \mid a,^{(1)} \ \sigma^{(1)}) \ E(\bar{\sigma}^{(2)} \mid a^{(2)}, \sigma^{(2)}).$$

Поэтому, для того, чтобы получить тождественно при всех возможных $a^{(1)}, a^{(2)}, \sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$

$$E(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\sigma}^{(2)} \mid a^{(1)}, a^{(2)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = \sigma^{(1)} \sigma^{(2)},$$

достаточно выбрать $\bar{\sigma}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$, удовлетворяющие условиям

$$E(\bar{\sigma}^{(1)} \mid a^{(1)}, \sigma^{(1)}) = \sigma^{(1)}, \quad E(\bar{\sigma}^{(2)} \mid a^{(2)}, \sigma^{(2)}) = \sigma^{(2)}.$$

Таким образом, для того, чтобы получить в условиях задачи, поставленной П. А. Гельвихом, оценку математического ожидания расхода снарядов, лишенную математической ошибки, следует пользоваться для средних квадратических уклонений $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ оценками (102), лишенными систематической ошибки. В соответствии с этим для h естественно предпочитать[21], исходя из требований П. А. Гельвиха, оценки (100 bis).

Вообще же, как видим, в соответствии с точкой зрения П. А. Гельвиха, окончательный выбор наиболее целесообразного вида приближенных значений h при малом числе наблюдений определяется не какими-либо общими требованиями теории вероятностей, а дополнительными условиями, которые могут быть различны в различных практических вопросах.

Поступило
15 IX 1941

ЛИТЕРАТУРА

1 R. A. Fisher. Statistical Methods for Research Workers, London, Oliver and Boyd (1925).

2 R. A. Fisher. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics, Phil. Trans. Roy. Soc., A, 222 (1922).

3 J. Neyman and E. S. Pearson. Sufficient Statistics and Uniformly Most Powerful Tests of Statistical Hypotheses, Statist. Research Memoirs University College, London 1 (1936), 113—137.

4 А. Н. Колмогоров. Метод медианы в теории ошибок, Математический сборник, 38 (1931), № 3—4, 47—50.

5 С. Н. Бернштейн. О «доверительных» вероятностях Фишера, Известия АН СССР, Серия математическая, 5 (1941) 85—94.

6 J. Neyman. On the Problem of Confidence Intervals, The Annals of Math. Statist., 6 (1935), 111—116.

7 В. И. Романовский. Математическая статистика, ГОНТИ (1938).

8 К. В. Бродовицкий. Об условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы априорные вероятности имели смысл, Труды Среднеазиатского гос. унив., Сер. V-а математическая, вып. 19 (1939).

9 К. В. Бродовицкий. Постановка проблемы сходства в теории статистических выборок, Труды Среднеазиатского гос. унив., Сер. V-а математическая, вып. 20 (1939).

10 П. А. Гельвих. Курс теории вероятностей, М., (1941).

11 П. А. Гельвих. Об одном неправильном выводе в теории вероятностей, Известия Военно-технической академии, (1927), стр. 128—140.

12 Р. Е. Соркин. О наивероятнейших значениях меры точности из опыта, Известия Артиллерийской академии, т. 20 (1936), стр. 81—92.

A. KOLMOGOROFF. SUR L'ESTIMATION STATISTIQUE DES PARAMÈTRES DE LA LOI DE GAUSS

RÉSUMÉ

En partant de quelques exemples élémentaires l'auteur entreprend une révision critique des conceptions générales de la théorie d'estimation statistique.

[21] Вывод этот получен в предоставленной мне любезно автором неопубликованной работе Р. Е. Соркина. Естественно, что тот же результат сохраняется и в случае одномерного или трехмерного рассеяния. Сам П. А. Гельвих ошибочно считает, что данная им постановка задачи приводит к формуле (100 ter).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 33–40 Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Даются улучшения некоторых результатов, содержащихся в известной книге автора[1]. Эти улучшения достигаются без существенного изменения изложенного там метода.

В моей заметке «Об оценке тригонометрических сумм»[2] я указываю ряд улучшений моих прежних результатов и результатов, связанных с ними, достигаемых некоторым уточнением моего метода. Это уточнение весьма просто и, в основном, почти не меняет моих прежних рассуждений. Подробное изложение указанных улучшений, ввиду наличия моих прежних работ, не представляет принципиальных трудностей; оно войдет в мою специальную монографию. Здесь же я ограничиваюсь упрощенной выборкой из него (в частности, опущены вычисления O-констант и грубо вычислены входящие в оценки показатели) некоторых результатов, относящихся к главам VI, VII и VIII моей книги[1].

Обозначения. Пусть n — целое постоянное, $n > 13$, $\nu = \frac{1}{n}$, ε — произвольное положительное постоянное < 1, c_0, c_1, ... — достаточно большие постоянные > 1. Символ $\sum^{h}$ обозначает сумму, имеющую $\ll h$ слагаемых; символическое неравенство $A \ll B$ обозначает: $A = O(B)$.

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$p = RH, \quad R > 1, \quad H \geqslant 2$$

и $v_1, \ldots, v_n$ *пробегают целые числа интервалов*

$$X_1 \leqslant v_1 < Y_1, \quad \ldots, \quad X_n \leqslant v_n < Y_n,$$

подчиненных условиям: $-p \leqslant X_1$, $Y_n \leqslant p$,

$$Y_j - X_j \geqslant R (j = 1, \ldots, n),$$
$$X_{j+1} - Y_j \geqslant R (j = 1, \ldots, n-1).$$

Тогда число E *систем* $(v_1, \ldots, v_n)$ *таких, что суммы*

$$v_1 + \ldots + v_n, \ \ldots, \ v_1^n + \ldots + v_n^n$$

---

[1] Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. X, 1937.

[2] Статья будет печататься в Докладах Академии Наук СССР.

лежат в интервалах с длинами

$$p^{1-\nu}, \ldots, p^{n(1-\nu)},$$

удовлетворяет условию

$$E \ll H^{\frac{n(n-1)}{2}} p^{\frac{n-1}{2}}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть k — целое постоянное $k > n$, $p \geqslant c_0$,*

$$p_t = p_1^{(1-\nu)^{t-1}} \quad (t = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть далее при каждом значении t, независимо от остальных, заданы G систем

$$(U_{t1}, \ldots, U_{tn});$$

каждая из них состоит из целых с условием

$$U_{tr} \ll p_t^r,$$

причем, каковы бы ни были n интервалов с длинами

$$p_t^{1-\nu}, \ldots, p_t^{n(1-\nu)},$$

число систем, числа которых соответственно лежат в этих интервалах, будет $\ll \Phi_t$. Полагаем

$$U_r = U_{1r} + \ldots + U_{kr} \, (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда имеем

$$U_r \ll p^r,$$

причем число $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием

$$U_1 = z_1, \ldots, U_n = z_n$$

удовлетворяет неравенству

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) \ll \Phi_1 \ldots \Phi_k;$$

суммируя же на все системы $(z_1, \ldots, z_n)$, имеем

$$\sum (\psi(z_1, \ldots, z_n))^2 \ll G_1 \ldots G_k \Phi_1 \ldots \Phi_k.$$

Эти леммы доказаны в моей книге, упомянутой выше.

ЛЕММА 3. *Пусть k и b — целые постоянные, $k > n$, $b > n$, p_1 — целое, $p_1 > c_0$, $p_t = p_1^{(1-\nu)^{t-1}}$, $\eta_t = [\nu \log p_t (\log 2)^{-1}]$ $(t = 1, \ldots, k)$,*

$$f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_1 x, \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда имеем

$$|T_1|^{2bk} \ll \frac{p_1^{\varepsilon}}{\eta_1 \ldots \eta_k} \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \cdots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} \sum^{H_{s_1 \ldots s_k}} K(s_1, \ldots, s_k),$$

где

$$H_{s_1 \ldots s_k} = p_1^{2bk} (p_1 \ldots p_k)^{-2b} \, 2^{(s_1 + \ldots + s_k)2n - 2(b-n)(s_1(k-1) + \ldots + s_{k-1})},$$

причем $K(s_1, \ldots, s_k)$ имеет вид

$$K(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{x_1=-cp_1}^{cp_1} \cdots \sum_{x_n=-cp_1^n}^{cp_1^n} \psi(x_1, \ldots, x_n) \, e^{2\pi i \left(\frac{f'(x_0)}{1!} x_1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x_n \right)},$$

где система целых чисел x_0, отвечающих различным $K(s_1, \ldots, s_k)$, определяется числами n, k, p_1; значения $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательны, и система их определяется числами n, k, p_1 x_0. При этом

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) \ll (p_1 \ldots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}} 2^{(s_1+\ldots+s_k)\left(-2b+\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

$$\sum(\psi(x_1, \ldots, x_n))^2 \ll (p_1 \ldots p_k)^{4b-\frac{n+1}{2}} 2^{(s_1+\ldots+s_k)\left(-4b+\frac{n(n+1)}{2}\right)}.$$

Доказательство. 1°. Положим $R_{ts} = p_t 2^{-s}$,

$$q_t = [p_{t-1}p_t^{-1}+1] \quad (t=2, \ldots, k).$$

Нетрудно видеть, что

$$p_{t-1} \leqslant p_t q_t \leqslant p_{t-1}(1+p_{t-1}^{\nu}).$$

2°. При $t=2, \ldots, k$ символом T_t обозначим сумму вида

$$T_t = \sum e^{2\pi i f(x)},$$

где x пробегает $\leqslant p_t$ последовательных целых чисел ряда $1, \ldots, [p_t]$. Полагаем

$$Z_t = T_t^b.$$

Взяв какое-либо $s=1, \ldots, \eta_t$ и разбивая интервал суммирования суммы T_t на $\leqslant 2^s$ интервалов длиною $\leqslant R_{ts}$, мы разобьем Z_t на $\leqslant 2^{sb}$ произведений Z_{ts}:

$$Z_t = \sum^{2^{sb}} Z_{ts}; \quad Z_{ts} = Z_{ts1} \ldots Z_{tsb}; \quad Z_{tsj} = \sum e^{2\pi i f(x)}.$$

В Z_{tsj} суммирование распространяется по x на целые числа (все или часть) некоторого интервала вида

$$\omega + (g-1)R_{ts} < x \leqslant \omega + gR_{ts}.$$

Число g назовем номером Z_{tsj}. Если среди номеров всех Z_{tsj} $(j=1, \ldots, b)$ существует n номеров с условием, что разность между каждыми двумя из них численно >1, то Z_{ts} назовем правильным. В противном случае Z_{ts} назовем неправильным. Для неправильного Z_{ts}, очевидно, существуют $r \leqslant n-1$ чисел $g_1, \ldots, g_r$ таких, что номера g могут равняться лишь

$$g_1, \ldots, g_r, \quad g_1+1, \ldots, g_r+1.$$

Число произведений с одинаковыми такими числами, очевидно, $\leqslant b^{2r}$, число же систем $g_1, \ldots, g_r$, очевидно, $\leqslant 2^{sr}$. Поэтому для числа B_{ts} неправильных Z_{ts} имеем

$$B_{ts} \ll 2^{sn}.$$

Правильные Z_{1s} обозначим через Z'_{1s}. При $s=1, \ldots, \eta_{t-2}$ правильные $Z_{t,s+1}$, получаемые подразделением интервалов суммирования сомножителей неправильных Z_{ts} обозначим через $Z'_{t,s+1}$. Все произведения $Z_{t\eta_t}$, получаемые подразделением интервалов суммирования сомножителей неправильных Z_{t,η_t-1} обозначим через $Z'_{t\eta_t}$. Для числа E_{ts} произведений Z'_{ts}, очевидно, имеем:

$$E_{ts} \ll 2^{sn}.$$

3°. Имеем

$$Z_t = \sum_{s=1}^{\eta_t} \sum^{2^{sn}} Z'_{ts},$$

$$|Z_t|^{2(k-t+1)} \ll \eta_t^{2(k-t+1)} \sum_{s=1}^{\eta_t} \Big| \sum^{2^{sn}} Z'_{ts} \Big|^{2(k-t+1)} \ll$$

$$\ll \eta_t^{2(k-t+1)-1} \sum_{s=1}^{\eta_t} 2^{2sn(k-t+1)-sn} \sum^{2^{sn}} |Z'_{ts}|^2 |Z'_{ts}|^{2(k-t)};$$

$$|Z'_{ts}| \ll \sum_{j=1}^{b} |Z_{tsj}|^b, \quad |Z'_{ts}|^{2(k-t)} \ll \sum_{j=1}^{b} |Z_{tsj}|^{2(k-t)},$$

причем каждое Z_{tsj} разбивается на $\ll q_{t+1} 2^{-s}$ сумм вида T_{t+1}. Поэтому

$$|Z'_{ts}|^{2(k-t)} \ll (q_{t+1}2^{-s})^{2b(k-t)-1} \sum^{q_{t+1}2^{-s}} |T_{t+1}|^{2b(k-t)},$$

$$|Z_t|^{2(k-t+1)} \ll \eta_t^{2(k-t+1)-1} \sum_{s=1}^{\eta_t} \sum^{M_{ts}} |Z'_{ts}|^2 |Z_{t+1}|^{2(k-t)};$$

$$M_{ts} = 2^{2sn-2s(b-n)(k-t)} q_{t+1}^{2b(k-t)}.$$

Эта формула, очевидно, верна и при $t=k$. Применяя ее к $t=1, \ldots, k$, ввиду

$$\eta_1^{2k}\eta_2^{2k-2} \ldots \eta_k^2 \ll p_1^{\varepsilon}; \quad q_2^{2b(k-1)} \ldots q_k^{2b} \ll p_1^{2bk}(p_1 \ldots p_k)^{-2b},$$

легко убедимся, что

$$|T_1|^{2bk} \ll \frac{p_1^{\varepsilon}}{\eta_1 \ldots \eta_k} \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \ldots \sum_{s_k=1}^{\eta_t} \sum^{H_{s_1 \ldots s_k}} |Z'_{1s_1}|^2 \ldots |Z'_{ks_k}|^2;$$

$$H_{s_1 \ldots s_k} = p_1^{2bk}(p_1 \ldots p_k)^{-2b} 2^{(s_1+\ldots+s_k)2n-2(b-n)(s_1(k-1)+\ldots+s_{k-1})}.$$

4°. Рассмотрим одно из произведений

$$|Z'_{1s_1}|^2 \ldots |Z'_{ks_k}|^2.$$

Пусть $e^{2\pi i f(x)}$ — одно из слагаемых суммы T_k, участвующей в образовании произведения Z'_{ks_k}. Все сомножители произведения Z'_{ts_t} преобразуются в суммы вида

$$\sum_{v_t} e^{2\pi i\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}v_t+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}v_t^n\right]},$$

где v_t пробегает соответствующие значения x, уменьшенные на x_0. Пусть $s_t < \eta_t$ и $g_1 < g_2 < \ldots < g_n$, расположенные в порядке возрастания номера тех n сомножителей произведения Z'_{ts_t}, которые характеризуют его как правильное. Имеем

$$g_{j+1} - g_j \geqslant 2 \quad (j=1, \ldots, n-1).$$

Переменные суммирования v_t для этих сомножителей обозначим через

$$v_{ts_t1}, \ldots, v_{ts_tn}.$$

Тогда $|Z'_{ls_t}|^2$ представится суммою вида

$$\sum_{W_1}\cdots\sum_{W_n}\sum_{v_{ls_t1}}\cdots\sum_{v_{ls_tn}} e^{2\pi i\left[\frac{f'(x_0)}{1}U_{ls_t1}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}U_{ls_tn}\right]};$$

$$U_{ls_tr}=W_r+V_r;\quad V_1=v_{ls_t1}+\ldots+v_{ls_tn},\ldots,V_n=v^n_{ls_t1}+\ldots+v^n_{ls_tn},$$

где число систем $(W_1, \ldots, W_n)$ будет $\ll R_{ls}^{2b-n}$.

Согласно лемме 1, число случаев, когда $V_1, \ldots, V_n$ лежат в интервалах с длинами

$$p_l^{1-\nu}, \ldots, p_l^{n(1-\nu)}, \tag{1}$$

будет

$$\ll p_1^{\frac{n-1}{2}}2^{s_t\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Поэтому для числа Φ_{ls_t} случаев, когда $U_{ls_t1}, \ldots, U_{ls_tn}$ лежат в интервалах с длинами (1), имеем

$$\Phi_{ls_t}\ll p_1^{2b-\frac{n+1}{2}}2^{-2s_tb+s_t\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{2}$$

Для числа G_{ls_t} всех слагаемых суммы имеем

$$G_{ls_t}\ll p_1^{2b}2^{-2s_tb}.$$

Ввиду $\Phi_{ls_t}\ll G_{ls_t}$ формула (2) верна и при $s_t=\eta_t$. Поэтому (лемма 2) произведение $|Z'_{1s_1}|^2 \ldots |Z'_{ks_k}|^2$ представится суммою вида

$$\sum_{U_1}\cdots\sum_{U_n} e^{2\pi i\left[\frac{f'(x_0)}{1}U_1+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}U_n\right]},$$

где для числа $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием

$$U_1=x_1, \ldots, U_n=x_n$$

имеем

$$\psi(x_1, \ldots, x_n)\ll(p_1, \ldots, p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}}2^{(s_1+\ldots+s_k)\left(-2b+\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

$$\sum(\psi(x_1, \ldots, x_n))^2\ll(p_1\ldots p_k)^{4b-\frac{n+1}{2}}2^{(s_1+\ldots s_k)\left(-4b+\frac{n(n+1)}{2}\right)}.$$

ЛЕММА 4. *Пусть Q и P — целые, $P>0$, $U\geqslant 1$, α и γ — вещественные, m — целое, $m>1$,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ (a, q)=1,\ q>0,\ |\theta|\leqslant 1,\ \Omega=\sum_{Q+1}^{Q+P}\min\left(U, \frac{1}{(\alpha my+\gamma)}\right).$$

Тогда имеем

$$\Omega\ll\left(\frac{P}{q}+1\right)(mU+q\log q).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть m — целые, $m>0$, Q и P — целые, $P>0$,*

$$\alpha_{n+1}=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ (a, q)=1,\ q>0,\ |\theta|\leqslant 1,$$

$$F(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1x,\ S=\sum_{x=Q+1}^{Q-P}e^{2\pi imF(x)}.$$

Тогда имеем

$$\alpha)\ S \ll m^{2\rho} P q^{-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \log 2(n+1)},$$

если $1 < q \leqslant P$.

$$\beta)\ S \ll m^{2\rho} P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \log 2\mu(n+1)},$$

если $P \leqslant q \leqslant p^n q,\ = P^{\mu}$

$$\gamma)\ S \ll P^{1-\rho}, \qquad \rho = \frac{\tau}{9n^2 \log \frac{n(n+1)}{\tau}},$$

если $m \leqslant P^{n\rho}$, $P^n \leqslant q < P^{n+1}$, $q = P^{n+1-\tau}$, $\tau \geqslant \tau_0 > 0$, τ_0 — *постоянное.*

Доказательство. Взяв $m = \left[\frac{3n}{2}\right]$, соответственно трем случаям

1) $P \leqslant q \leqslant P^{n-\rho}$, 2) $P^{n-\rho} \leqslant q \leqslant P^n$, 3) $P^n \leqslant q < P^{n+1-\tau_0}$; $m \leqslant P^{n\rho}$,

положим: $p_1 = [q^{\nu}]$ для 1), $p_1 = [P^{1-\rho}]$ для 2) и 3).

$$k = \left[\frac{\log 2\mu(n+1)}{-\log(1-\nu)} + 1\right] \text{ для 1) и 2)}, \quad k = \left[\frac{\log 2\,\frac{n(n+1)}{\tau}}{-\log(1-\nu)} + 1\right] \text{ для 3)}.$$

Имеем

$$S = \sum_{y=Q+1}^{Q+P-p_1} T_1 + \theta' p_1^2; \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i m F(y+x)}, \ |\theta'| \leqslant 1.$$

$$S \ll \frac{1}{p_1} \sum_y T_1 + p_1 \ll \frac{1}{p_1}\left(P^{2bk-1} \sum |T_1|^{2bk}\right)^{\frac{1}{2bk}} + p_1. \tag{3}$$

Применим лемму 3. Суммируя по y какое-либо одно значение $K(s_1, \ldots, s_k)$, получим

$$\sum_y K(s_1, \ldots, s_k) \ll \sqrt{(p_1 \ldots p_k)^{4b - \frac{n+1}{2}}\, 2^{(s_1 + \ldots + s_k)\left(-4b + \frac{n(n+1)}{2}\right)}} \times$$
$$\times \sqrt{\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} \sum_y \sum_{y_1} e^{2\pi i((Y_1 - Y_1')x_1 + \ldots + (Y_n - Y_n')x_n)}},$$

где

$$Y_r = m\frac{f^{(r)}(x_0+y)}{r!}, \quad Y_n = m(n+1)a_{n+1}(x_0+y) + ma_n,$$

и y_1, независимо от y, пробегает те же значения, что и y. Отсюда

$$\sum_y K(s_1, \ldots, s_l) \ll \sqrt{(p_1 \ldots p_k)^{4b - \frac{n+1}{2}}\, 2^{(s_1 + \ldots + s_k)\left(-4b + \frac{n(n+1)}{2}\right)}\, p^{\frac{n(n+1)}{2} - n} G};$$

$$G = \sum_y \sum_{y_1} \sum_{x_n} e^{2\pi i(Y_n - Y_n')x_n} \ll \sum_y \sum_{y_1} \min\left(p_1^n, \frac{1}{2(m(n+1)a_{n+1}(y-y_0))}\right).$$

Применяя лемму 4, имеем:

$$G \ll P\left(\frac{P}{q} + 1\right) m p_1^n + q \log q),$$

что $\ll mP^{1+n\rho+\varepsilon}p_1^n$ для 1) и 2) и $\ll P^{2+n\rho+\varepsilon-\tau}p_1^n$ для 3). Следовательно, полагая $\sigma=(1-\nu)^k$ и замечая, что $p_1 \ldots p_k = p_1^{n-n\sigma}$, имеем

$$\sum_y K(s_1, \ldots, s_t) \ll (p_1 \ldots p_k)^{2b} p_1^{\frac{n(n+1)}{4}\sigma} 2^{(s_1+\ldots+s_k)\left(-2b+\frac{n(n+1)}{4}\right)} U, \quad (4)$$

где $U = m^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1+n\rho+\varepsilon}{2}}$ для 1) и 2) и $U = P^{\frac{2+n\rho+\varepsilon-\tau}{2}}$ для 3). Умножая правую часть (4) на $H_{s_1 \ldots s_t}$, получим

$$p_1^{2bk} p_1^{\frac{n(n+1)}{4}\sigma} U 2^{(s_1+\ldots+s_k)\left(2n-2b+\frac{n(n+1)}{4}\right)-2(b-n)[s_1(k-1)+\ldots+s_{k-1}]}.$$

Коэффициент $\rho(u)$ при s_{k-u} в показателе будет

$$\rho(u) = \frac{n(n+1)}{4} - 2(b-n)(u+1) < (n-1)\left(\frac{n}{4}-u\right).$$

Он может оказаться положительным лишь при $u=1, \ldots, \left[\frac{n}{4}\right]$. При таких u легко найдем

$$2^{s_{k-u}} \leqslant p_{k-u}^{\nu} < p_1^{\frac{2\nu}{3\mu(n+1)}} < P^{\frac{2}{3}\nu^3} \text{ для 1) и 2)}, \quad 2^{s_{k-u}} < P^{\frac{2}{3}\tau\nu^3}.$$

При этом сумма соответствующих $(n-1)\left(\frac{n}{4}-u\right)$ будет $<\frac{n^3}{32}$. Кроме того, $p_1^{\frac{n(n+1)}{4}} \leqslant P^{\frac{1}{8}}$ для 1) и 2) и $\leqslant P^{\frac{\tau}{8}}$ для 3).

Поэтому для 1) и 2) имеем

$$|T_1|^{2bk} \ll p_1^{2bk} P^{\frac{1}{2}+\frac{1}{600}+\frac{1}{48}+\frac{1}{8}} m^{\frac{1}{2}} \ll p_1^{2bk} P^{\frac{1}{2}+0{,}15} m^{\frac{1}{2}}.$$

$$S \ll P^{1-\frac{0{,}35}{2bk}} m^{\frac{1}{4bk}},$$

а для 3) имеем

$$|T_1|^{2bk} \ll p_1^{2bk} P^{1+\frac{\tau}{600}+\frac{\tau}{48}+\frac{\tau}{8}-\frac{\tau}{2}} \ll p_i^{2bk} P^{1-\frac{\tau}{2}+0{,}15\tau}.$$

$$S \ll P^{1-\frac{0{,}35\tau}{2bk}},$$

откуда и следует теорема 1; в частности α) является тривиальным следствием случая 1).

Повторяя почти без изменения доказательство главы VIII, без труда получим следующее улучшение теоремы этой главы:

ТЕОРЕМА 2. *При условиях теоремы* 1 (*без условий, содержащих* m) *и любом* γ *с условием* $0 < \gamma \leqslant 1$ *число дробей ряда*

$$\{f(x)\}; \ x = 1, \ldots, P,$$

удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \{f(x)\} < \gamma$, *выражается формулой*

$$\gamma P + H,$$

где, соответственно случаям α), β), γ) *теоремы* 1, *имеем*

$$\alpha)\ H \ll Pq^{-\rho},$$
$$\beta)\ H \ll P^{1-\rho},$$
$$\gamma)\ H \ll P^{1-\rho}.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
10 II 1942

1. VINOGRADOW. AN IMPROVEMENT OF THE ESTIMATION OF TRIGONOMETRICAL SUMS

SUMMARY

The method of the author given in his book «A new method in the analytical theory of numbers» 1) is improved without change of the fundamental ideas. In particular the following theorem is proved:

THEOREM 1. *Let m be an integer, $m > 0$, Q and P be integers, $P > 0$,*

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

$$F(x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots + \alpha_1 x, \quad S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m F(x)}.$$

Then we have

$$\alpha)\ S \ll m^{2\rho} P q^{-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \log 2(n+1)},$$

if $1 < q \leqslant P$;

$$\beta)\ S \ll m^{2\rho} P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \log 2\mu(n+1)},$$

if $P \leqslant q \leqslant P^n$, $q = P^\mu$

$$\gamma)\ S \ll P^{1-\rho}. \quad \rho = \frac{\tau}{9n^2 \log \dfrac{n(n+1)}{\tau}},$$

if $m \leqslant P^{n\rho}$, $P^n \leqslant q < P^{n+1}$, $q = P^{n+1-\tau}$, $\tau \geqslant \tau_0 > 0$, τ_0 *is a constant number.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 41–70 Série mathématique

Ю. В. ЛИННИК

НОВЫЕ ОЦЕНКИ СУММ ВЕЙЛЯ ПО МЕТОДУ И. М. ВИНОГРАДОВА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается видоизменение метода И. М. Виноградова оценки сумм Вейля. При этом получается улучшение этих оценок и аналогичное улучшение для асимптотического закона в проблеме Варинга.

В настоящей работе излагается новый вариант известного метода И. М. Виноградова для оценки сумм Вейля, который приводит к некоторому улучшению этих оценок. В частности, для

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(a_0x^2+\ldots+a_n)},$$

где $a_0=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$; $(a,q)=1$; $|\theta|\leqslant 1$; $P\leqslant q\leqslant P^{n-1}$, получается оценка

$$|S|\ll P^{1-\rho};\qquad \rho>\frac{c_0}{n^{\frac{14}{5}}\ln^2 n},^*$$

и аналогичные оценки для других значений q. Далее, полученные результаты применяются к изучению асимптотического закона в проблеме Варинга, причем доказывается, что известная асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$x_1^n+x_2^n+\ \ldots\ +x_r^n=N$$

имеет место уже при $r>cn^{\frac{14}{5}}\ln^2 n$.

1

Повторим для дальнейшего ход рассуждений И. М. Виноградова [1] в слегка измененном виде. Основной оценкой метода И. М. Виноградова является следующее. Дано n форм от b_1 переменных вида

$$V_1=v_1+v_2+\ \ldots\ +v_{b_1},$$
$$V_2=v_1^2+v_2^2+\ \ldots\ +v_{b_1}^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n=v_1^n+v_2^n+\ \ldots\ +v_{b_1}^n,$$

где v_i независимо пробегают целочисленные значения

$$0\leqslant v_i\geqslant p;(i=1,2,\ldots,b_1).$$

* В статье автора «On Weyl's sums», печатаемой в Математическом сборнике, достигается оценка: $\rho>\frac{c_0}{n^2\ln n}$

Требуется оценить сверху количество Q систем чисел $v_1, v_2, \ldots, v_{b_1}$), для которых числа $V_1, V_2, \ldots, V_n$ попадают в предписанные наперед сегменты соответственных длин

$$\ll p^{1-\gamma}; \qquad \ll p^{2(1-\gamma)}; \ \ldots ; \qquad \ll p^{n(1-\gamma)}; \qquad \gamma \in (0, 1),$$

и сравнить его со средним значением

$$\frac{p^{b_1} p^{\frac{n(n+1)}{2}(1-\gamma)}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}} = p^{b_1 - \gamma \frac{n(n+1)}{2}}.$$

При этом желательно получить оценку

$$Q \leqslant c_\varepsilon p^{b_1 - \gamma \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon} \tag{1}$$

($\varepsilon > 0$ фиксировано и сколь угодно мало) при возможно большем γ и возможно меньшем b_1. В частности, И. М. Виноградов получает такую оценку при

$$b_1 \geqslant c_1 n^2; \qquad \gamma = \nu = \frac{1}{n}.$$

Мы же получим такую оценку при $b_1 \geqslant C_0 n^2 \ln n$; $\gamma = \frac{r}{n}$; $r = [n^{\frac{1}{5}}]$, так что наши сегменты будут несколько у́же.

2

Пусть мы располагаем оценкой (1) при данных $n > 2$, b_1 и $\gamma = \frac{r_1}{n}$, где $r_1 \in (0, n)$. Выведем тогда по методу И. М. Виноградова [1] отвечающую ей оценку сумм Вейля для полинома степени $n+1$:

$$F(z) = Az^{n+1} + A_0 z^n + \ldots + A_n \qquad (A_i \text{ реальны})$$

$$S = \sum_{z=1}^{P} e^{2\pi i F(z)}.$$

Вводя «лишнее суммирование» по x от 1 до p_1, применяя неравенство Коши — Шварца и полагая $T_1(y) = T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i F(y+x)}$, найдем для фиксированного целого k и b

$$S \ll \frac{1}{p_1} \left(p^{bk-1} \sum_{y=1}^{P} |T_1|^{bk} \right)^{\frac{1}{bk}} + p_1.$$

Далее оказывается, что если положить

$$p_2 = p_1^{1-\gamma}, \qquad p_3 = p_1^{(1-\gamma)^2}, \qquad \ldots, \qquad p_k - p_1^{(1-\gamma)^{k-1}},$$

то $|T_1|^{bk}$ можно мажорировать суммой $\ll p_1^{bk} (p_1 p_2 \ldots p_k)^{-b}$ слагаемых вида

$$K(y) = K = |T_1 \ldots T_k|^b,$$

где

$$T_t = \sum_{v_t=0}^{[p_t]} e^{2\pi i \varphi(v_t)};$$

$$\varphi(v_t) = F(y + x_0 + v_t) = Bv_t^{n+1} + B_0 v_t^n + \ldots + B_n,$$

где

$$B = A; \quad B_0 = (n+1)\,A\,(x_0 + y) + A_0; \quad B_j = B_j\,(x_0, y).$$

Если b четно и $b = 2b_1$, то, полагая $Z_t = |\,T_t\,|^b$, найдем

$$Z_t = \sum_{v_{t1}, \ldots, v_{tb}} e^{2\pi i\,\{BV_{t,n+1} + B_0 V_{tn} + \ldots + B_{n-1} V_{t1}\}},$$

где

$$\begin{aligned} V_{t,n+1} &= v_{t1}^{n+1} + v_{t2}^{n+1} + \ldots + v_{tb_1}^{n+1} - v_{t,b_1+1}^{n+1} - \ldots - v_{tb}^{n+1}, \\ V_{tn} &= v_{t1}^{n} + v_{t2}^{n} + \ldots + v_{tb_1}^{n} - v_{t,b_1+1}^{n} - \ldots - v_{tb}^{n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{t1} &= v_{t1} + v_{t2} + \ldots + v_{tb_1} - v_{t,b_1+1} - \ldots - v_{tb} \end{aligned}$$

и величины v_{ti} $(i = 1, 2, \ldots, b)$ пробегают независимо друг от друга значения $0, 1, \ldots, [p_t]$.

Далее

$$K = Z_1 Z_2 \ldots Z_k = \sum e^{2\pi i (BU_{n+1} + B_0 U_n + \ldots + B_{n-1} U_1)},$$

где

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= V_{1,n+1} + V_{2,n+1} + \ldots + V_{k,n+1}, \\ U_n &= V_{1n} + V_{2n} + \ldots + V_{kn} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_1 &= V_{11} + V_{21} + \ldots + V_{k1}. \end{aligned}$$

Из оценки (1) сразу выводим, что число значений $(v_{t1}, v_{t2}, \ldots, v_{tb})$, для которых $V_{t1}, V_{t2}, \ldots, V_{tn}$ лежат в предписанных интервалах длин $\ll p_t^{1-\gamma}$; $\ll p_t^{2(1-\gamma)}$; $\ldots$; $\ll p_t^{n(1-\gamma)}$, будет

$$\ll c_\varepsilon p_t^{b_1} p_t^{b_1 - \gamma \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon} = c_\varepsilon p_t^{b - \gamma \frac{n(n-1)}{2} + \varepsilon}.$$

А отсюда непосредственно следует, что число $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ решений системы уравнений

$$U_1 = z_1; \quad U_2 = z_2; \quad \ldots; \quad U_n - z_n \qquad (U_{n+1} \text{ — любое})$$

в целых числах v_{tj} $(t = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, b)$ будет

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n) < c_\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^{b - \gamma \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon}$$

и

$$\sum_{z_j \ll p^j} [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 \leqslant c_\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^{2b - \gamma \frac{n(n-1)}{2} + \varepsilon}.$$

Далее, если $A = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$; $(a, q) = 1$; $|\,\theta\,| \leqslant 1$; $q > P$, то, как показывает И. М. Виноградов,

$$\Bigl(\sum_y K\Bigr)^2 \ll \sum_{z_1, \ldots, z_n} [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 p_1 \ldots p_1^n P\,(1 + p_1^{-n} q \ln q).$$

При наших оценках получаем

$$\sum_y K \ll c_\varepsilon p_1^\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^{b - \frac{n(n+1)}{4}\gamma} p_1^{\frac{n(n+1)}{4}} P^{\frac{1}{2}} (1 + p_1^{-n} q \ln q)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее

$$p_1 \ldots p_k = p_1^{1+(1-\gamma)+\ldots+(1-\gamma)^{k-1}} = p_1^{\frac{1-(1-\gamma)^k}{\gamma}},$$

так что

$$(p_1 \ldots p_k)^{\frac{n(n+1)}{4}\gamma} = p_1^{\frac{n(n+1)}{4} - (1-\gamma)^k \frac{n(n+1)}{4}}.$$

Отсюда

$$\sum_{\nu} K \leqslant c_\varepsilon p_1^\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^b p_1^{(1-\gamma)^k \frac{n(n+1)}{4}} P^{\frac{1}{2}} (1 + p_1^{-n} q \ln q)^{\frac{1}{2}}.$$

И далее

$$S \leqslant c_\varepsilon P [P^{-1} p_1^{(1-\gamma)^k \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon} (1 + p_1^{-n} q \ln q)]^{\frac{1}{2} bk} + p_1. \qquad (2)$$

Это и есть основная формула для оценок сумм Вейля. Мы видим, что чем больше число γ, тем меньше надо брать k, чтобы нейтрализовать влияние фактора $p_1^{(1-\gamma)^k \frac{n(n+1)}{2}}$, и тем лучше будет оценка.

3

Пусть дано n форм от b_1 переменных

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = v_1 + \ldots + v_{b_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = v_1^n + \ldots + v_{b_1}^n \end{array}\right\} \qquad 0 \leqslant v_i \leqslant p$$

и n сегментов вида

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = [M_1 - \theta_1 p^{1-\gamma},\ M_1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_n = [M_n - \theta_n p^{n(1-\gamma)},\ M_n]. \end{array}\right\} \qquad |\theta_i| \leqslant 1.$$

Требуется оценка сверху для числа Q систем $(v_1, v_2, \ldots, v_{b_1})$, для которых $V_1, V_2, \ldots, V_n$ попадают в сегменты $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Зададимся произвольно малым фиксированным $\eta > 0$. Положим

$$r = \left[\frac{n^2}{\eta}\right] + 1; \qquad Z_1 = p^{(1-\gamma)+\eta}; \qquad Z_2 = p^{2(1-\gamma)+\eta}, \ \ldots, \quad Z_n = p^{n(1-\gamma)+\eta}$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} V_1 + y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{1r} = M_1, \\ V_2 + y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{2r} = M_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n + y_{n1} + y_{n2} + \ldots + y_{nr} = M_n, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

где V_i наши формы от b_1 переменных, а y_{ij} независимо пробегают все целые числа между $-Z_i$ и Z_i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, r)$. Пусть T — число решений этой системы. Тогда можно утверждать, что

$$Q \ll \frac{T}{Z_1^{r-1} Z_2^{r-1} \ldots Z_n^{r-1}}.$$

В самом деле Q есть число систем $(v_1, v_2, \ldots, v_{b_1})$, для которых

$$\begin{array}{l} V_1 = v_1 + \ldots + v_{b_1} \in I_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = v_1^n + \ldots + v_{b_1}^n \in I_n. \end{array}$$

Пусть $(v_1^0, v_2^0, \ldots, v_{b_1}^0)$ — одна такая система, и ей отвечает система значений форм

$$(V_1^0, V_2^0, \ldots, V_n^0).$$

Тогда имеем

$$|M_1 - V_1^0| \leqslant \frac{Z_1}{p^{\gamma_1}}; \quad \ldots; \quad |M_n - V_n^0| \leqslant \frac{Z_n}{p^{\gamma_1}}.$$

Пусть при каждом i, $y_{i2}, y_{i3}, \ldots, y_{ir}$ пробегают независимо все целые числа сегмента $\left[-\frac{Z_i}{4r}, \frac{Z_i}{4r}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Определим для каждой системы их значений y_{i1} равенствами

$$y_{i1} = M_i - V_i^0 - y_{i2} - \ldots - y_{ir} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При $p > p_0(\eta)$ правые части их будут удовлетворять неравенствам

$$-\frac{2}{3} Z_i \leqslant M_i - V_i^0 - y_{i2} - \ldots - y_{ir} \leqslant \frac{2}{3} Z_i.$$

Поэтому каждое значение y_{i1} будет лежать в $[-Z_i, Z_i]$, и мы получим решение системы (3).

Итак, одно значение $(v_1^0, \ldots, v_{b_1}^0)$ дает нам не меньше

$$\left(\frac{Z_1}{2r}\right)^{r-1} \left(\frac{Z_2}{2r}\right)^{r-1} \ldots \left(\frac{Z_n}{2r}\right)^{r-1}$$

различных решений (3). Различные значения $(v_1^0, \ldots, v_{b_1}^0)$ дают также, очевидно, различные решения (3), хотя отвечающие им $V_1^0, V_2^0, \ldots, V_n^0$ могут совпадать. Отсюда имеем

$$QZ_1^{r-1} Z_2^{r-1} \ldots Z_n^{r-1} \ll T,$$
$$Q \ll \frac{T}{Z_1^{r-1} \ldots Z_n^{r-1}}. \tag{4}$$

4

Число решений T системы (1) легко выразить с помощью n-кратного интеграла. Для этого введем выражения

$$f(x) = \alpha x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n; \; S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{x=0}^{p} e^{2\pi i f(x)},$$

$$S_k = \sum_{I_\varkappa = -Z_\varkappa}^{[Z_\varkappa]} e^{2\pi i \alpha_\varkappa Y_\varkappa}, \qquad Y_\varkappa = y_{\varkappa 1} + y_{\varkappa 2} + \ldots + y_{\varkappa r}.$$

Тогда

$$T = \int_0^1 d\alpha_n \int_0^1 d\alpha_{n-1} \ldots \int_0^1 d\alpha_1 [S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]^{b_1} S_1^r S_2^r \ldots$$
$$\ldots S_n^r e^{-2\pi i(\alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_n M_n)}.$$

Примем теперь во внимание известную оценку

$$|S_\varkappa| \ll \frac{1}{(\alpha_\varkappa)}.$$

Если $1 - \frac{1}{p^{\varkappa(1-\gamma)}} \geqslant \alpha_\varkappa \geqslant \frac{1}{p^{\varkappa(1-\gamma)}}$, то

$$|S_\varkappa| \ll p^{\varkappa(1-\gamma)} = \frac{Z_\varkappa}{p^{\gamma_1}}; \quad |S_\varkappa|^r \ll \frac{Z_\varkappa^r}{p^{\eta r}} \ll \frac{Z_\varkappa^r}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому, полагая $\delta_\varkappa = \frac{1}{p^{\varkappa(1-\gamma)}}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, найдем

$$T = \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, [S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]^{b_1} S_1^r \ldots$$
$$\ldots S_n^r e^{-2\pi i(\alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_n M_n)} + R,$$

где $R \ll \frac{p^{b_1} Z_1^r \ldots Z_n^r}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

Разбивая последний интеграл на сумму $\ll Z_1^r \ldots Z_n^r$ слагаемых вида

$$\int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, [S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]^{b_1} e^{2\pi i(\alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_n M_n + \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n)},$$

найдем

$$T \ll Z_1^r \ldots Z_n^r \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} + O\left(\frac{p^{b_1} Z_1^r \ldots Z_n^r}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right).$$

Поэтому имеем из (4)

$$Q \ll Z_1 \ldots Z_n \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_1} d\alpha_1 \, |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} + O\left(\frac{p^{b_1} Z_1 \ldots Z_n}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right).$$

Учитывая, что $Z_1 \ldots Z_n = p^{\frac{n(n+1)}{2}(1-\gamma) + n\eta}$ и полагая

$$J = \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1},$$

найдем

$$Q \ll p^{\frac{n(n+1)}{2}(1-\gamma)+n\eta} J + \frac{p^{b_1} p^{\frac{n(n+1)}{2}(1-\gamma)+n\eta}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

откуда, учитывая произвольную малость η, выводим, что для получения оценки

$$Q < c_\varepsilon p^{b_1 - \gamma \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon}$$

достаточно установить оценку

$$J < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}. \qquad (5)$$

5

Оценка (2) с $\gamma = \frac{1}{n} = \nu$ получится, если мы, например, назначим в качестве пределов интеграла J числа

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{2n^2 p^{\varkappa(1-\nu)}} \qquad (\varkappa = n, n-1, \ldots, 1).$$

Если мы докажем в этом предположении и при $b_1 = n^2$ оценку (5), то это будет отвечать, согласно предыдущему, оценкам И. М. Виноградова сумм Вейля с точностью до постоянных множителей.

Такая оценка нам будет нужна и для дальнейшего, поэтому займемся ею. Пусть

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{2n^2 p^{\varkappa(1-\nu)}} \qquad (\varkappa = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1); \quad b_1 = n^2$$

$$J = \int_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int_{-\delta_1}^{\delta_1} |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}.$$

В силу положительности подинтегральной функции, J только увеличится, если мы несколько расширим его пределы, полагая

$$\delta'_n = \frac{1}{2n^2 p^{n-1}}; \quad \delta'_{n-1} = \frac{1}{2n^2 p^{n-2}}; \ \ldots; \quad \delta'_1 = \frac{1}{2n^2};$$

$$J' = \int_{-\delta'_n}^{\delta'_n} d\alpha_n \ldots \int_{-\delta'_1}^{\delta'_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} = \int \underset{O}{\ldots} \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}\, d\omega.$$

Достаточно поэтому доказать, что

$$J' < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}. \tag{6}$$

Для этого воспользуемся следующей известной леммой Ландау — ван-дер Корпута [8]:

Если $S = \sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}$, где $f'(x)$ существует и монотонна в $[a, b]$, и $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ в $[a, b]$, то

$$|S| \leqslant \frac{2}{\inf\limits_{[a,b]} f'(x)}. \tag{7}$$

Имеем

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x;$$
$$f'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \ldots + \alpha_1.$$

В нашей области интегрирования O будет $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Сегмент $\left[\frac{1}{2n^2p^n}, \frac{1}{2n^2p^{n-1}}\right]$ разобьем *, идя справа налево, на $\ll \ln p$ сегментов вида

$$\Delta_\tau = \left[\frac{1}{4n^2 p^{n-1+\tau}}, \frac{1}{2n^2 p^{n-1+\tau}}\right], \text{ где } \tau \in [0, 1];$$

крайний левый сегмент будет иметь вид

$$\Delta_{\tau_l} = \left[\frac{1}{2n^2p^n}, \frac{1}{2n^2 p^{n-1+\tau_l}}\right] \left(\frac{1}{4n^2 p^{n-1+\tau_l}} \text{ будет} \leqslant \frac{1}{2n^2p^n}\right).$$

Если для точки $M(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$ области O будет $|\alpha_n| \in \Delta_\tau$, то

$$\max\left\{\left|\frac{(n-1)\alpha_{n-1}}{p n \alpha_n}\right|, \left|\frac{(n-2)\alpha_{n-2}}{p^2 n\alpha_n}\right|, \ldots, \left|\frac{\alpha_1}{p^{n-1} n\alpha_n}\right|\right\} \leqslant 2p^\tau,$$

* $\left[0, \frac{1}{2n^2p^{n-1}}\right]$ разбиваем пополам, левую половину — опять пополам и т. д.

иначе при некотором $\varkappa$ было бы

$$|\alpha_{n-\varkappa}| > \frac{p^{\varkappa}p^{\tau}2}{4n(n-\varkappa)p^{n-1+\tau}} > \frac{1}{2n^2p^{n-1-\varkappa}} = \delta'_{n-\varkappa},$$

что невозможно.

Каждому Δ_τ сопоставим сегмент $[8^n n!, 2p^\tau]$ (если только $2p^\tau > 8^n n!$) и разобьем его, идя справа налево, на $\ll \ln p$ сегментов вида

$$\Delta_{\tau\rho} = [p^\rho, 2p^\rho]; \quad \rho \leqslant \tau;$$

крайний слева сегмент будет иметь вид $[8^n n!, 2p^{\rho_l}]$. Далее, область O разобьем на области трех типов:

1° Области $O_{\tau\rho}$ с условиями:

a) $|\alpha_n| \in \Delta_\tau$,

b) $\max\left\{\left|\frac{(n-1)\alpha_{n-1}}{pn\alpha_n}\right|, \left|\frac{(n-2)\alpha_{n-2}}{p^2n\alpha_n}\right|, \ldots, \left|\frac{\alpha_1}{p^{n-1}n\alpha_n}\right|\right\} \in \Delta_{\tau\rho}$.

2° Области $O_{\tau 0}$ с условиями:

a) $|\alpha_n| \in \Delta_\tau$,

b) $\max\left\{\left|\frac{(n-1)\alpha_{n-1}}{pn\alpha_n}\right|, \ldots, \left|\frac{\alpha_1}{p^{n-1}n\alpha_n}\right|\right\} \leqslant 8^n n!$

3° Область O_{00} под условием $|\alpha_n| \leqslant \frac{2}{2n^2p^n}$.

Число областей $O_{\tau\rho}$ и $O_{\tau 0}$ будет $\ll (\ln p)^2$. Каждая точка O попадает в одну из областей или на ее границу.

Подсчитаем объем $V_{\tau\rho}$ области $O_{\tau\rho}$. Имеем

$$V_{\tau\rho} < c_1 \frac{1}{p^{n-1+\tau}} \frac{p^\rho p}{p^{n-1+\tau}} \cdots \frac{p^\rho p^{n-1}}{p^{n-1+\tau}} <$$

$$< c_1 \frac{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}{p^{(n-1+\tau-\rho)n}} = c_1 \frac{1}{p^{\frac{n(n+1)}{2}-(1-\tau+\rho)n}}. \tag{8}$$

Для области $O_{\tau 0}$ имеем

$$V_{\tau 0} < c_2 \frac{1}{p^{\frac{n(n+1)}{2}-(1-\tau)n}}. \tag{8'}$$

Возьмем какую-либо область $O_{\tau\rho}$ и оценим

$$\int_{O_{\tau\rho}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega.$$

Положим $\sigma = 1 - \tau + \rho$. В каждой точке $M(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$ области $O_{\tau\rho}$ выпишем нули $f'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + \ldots + \alpha_1$

$$\xi'_1 = \sigma'_1 + it'_1; \quad \xi'_2 = \sigma'_2 + it'_2; \quad \ldots; \quad \xi'_{n-1} = \sigma'_{n-1} + it'_{n-1}$$

и отметим «опасную зону» L для значений x в виде $s \leqslant n-1$ сегментов под условием

$$|x - \sigma'_\varkappa| < p^{1-\sigma\nu}; \quad \nu = \frac{1}{n}; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Число целых x, лежащих в опасной зоне L, будет $\ll p^{1-\sigma\nu}$.

Дадим оценку для $f'(x)$ снизу при $x \overline{\in} L$.

Имеем

$$|f'(x)| > c_3 |\alpha_n| |x - \xi'_1| \ldots |x - \xi'_{n-1}|.$$

Далее для какого-либо $\varkappa_0$ среди чисел $\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1$ должно быть

$$\left| \frac{(n-\varkappa_0)\, a_{n-\varkappa_0}}{n a_n} \right| \geqslant p^{\varkappa_0+\rho},$$

и так как $\frac{(n-\varkappa_0)\, a_{n-\varkappa_0}}{n a_n}$ есть симметрическая функция ξ_j', получаем

$$\left| \sum_{i, \ldots, i_{\varkappa_0}} \xi_{i_1}' \ldots \xi_{i_{\varkappa_0}}' \right| \geqslant p^{\varkappa_0+\rho},$$

и для какого-либо из этих произведений, скажем, $\xi_1', \ldots, \xi_{\varkappa_0}'$, будет

$$|\xi_1' \ldots \xi_{\varkappa_0}'| > \frac{p^{\varkappa_0+\rho}}{n!}.$$

Не все $\varkappa_0$ величин $|\xi_1'|, \ldots, |\xi_{\varkappa_0}'|$ удовлетворяют неравенству $|\xi_j'| \leqslant 2p$, иначе было бы

$$|\xi_1' \ldots \xi_{\varkappa_0}'| \leqslant 2^{\varkappa_0} p^{\varkappa_0} < \frac{p^\rho p^{\varkappa_0}}{n!} \quad (\text{ибо } p^\rho > 8^n n!).$$

Пусть

$$|\xi_i'| \geqslant 2p \quad (i = 1, 2, \ldots, f); \quad \varkappa_0 \geqslant f \geqslant 1;$$
$$|\xi_{f+1}'| < 2p, \ldots, |\xi_{\varkappa_0}'| < 2p.$$

Тогда

$$|\xi_1'| \ldots |\xi_f'| \geqslant \frac{p^\rho p^{\varkappa_0}}{n!\, 2^{\varkappa_0} p^{\varkappa_0-f}} > c_4' p^{\rho+f}$$

$$|x-\xi_1'| \ldots |x-\xi_f'| \geqslant \frac{1}{2^f} |\xi_1'| \ldots |\xi_f'| > c_4 p^{\rho+f},$$

$$\text{ибо} \quad |x-\xi_j'| \geqslant \frac{1}{2} |\xi_j'| \quad \text{при} \quad |\xi_j'| \geqslant 2p;$$

$$|f'(x)| > c_5 \frac{1}{p^{n-1+\tau}} p^{f+\rho} p^{(1-\sigma\nu)(n-1-f)} \geqslant c_5 \frac{p^\rho}{p^\tau p^{(n-1)\sigma\tau}} =$$

$$= c_5 \frac{1}{p^{\tau-\rho+\sigma-\sigma\nu}} = \frac{c_5}{p^{1-\sigma\nu}}.$$

Выделяя теперь из участка $[0, p]$ $S \leqslant n-1$ сегментов «опасных зон» L и разбивая оставшиеся сегменты на участки монотонности $f'(x)$ [их будет $\leqslant n-1$ по числу нулей $f''(x)$], пользуясь (7) и (9), найдем для $O_{\tau\rho}$

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \ll p^{1-\sigma\nu} + p^{1-\sigma\nu} \ll p^{1-\sigma\nu},$$
$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} \ll p^{b_1-\sigma\nu} \quad (b_1 = n^2).$$

Учитывая (8), найдем

$$\int_{O_{\tau\rho}} \ldots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega \ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

6

Обратимся к области $O_{\tau 0}$; положим $\sigma = 1 - \tau$. Назначая, как и выше, опасные зоны L вида $|x - \sigma_\varkappa'| \leqslant p^{1-\sigma\nu}$, найдем вне L

$$f'(x) > c_3 \frac{1}{p^{n-1+\tau}} p^{(1-\sigma\nu)(n-1)} = \frac{c_3}{p^{\tau+\sigma-\sigma\nu}} = \frac{c_3}{p^{1-\sigma\nu}}$$

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \ll p^{1-\sigma\nu}; \qquad |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} \ll p^{b_1-\sigma n}$$

и, учитывая (8′), получим

$$\int_{O_{\tau 0}} \ldots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega \ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Рассмотрим теперь область O_{00}, где $|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{2n^2p^n}$.

Полагая $f_1(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x$, найдем $|f'(x) - f_1'(x)| < \frac{1}{2p}$; если $|f_1'(x)| \geqslant \frac{1}{p}$, то $|f'(x)| \geqslant \frac{|f_1'(x)|}{2}$. Исходя из выражения $f_1'(x) = (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1$ и его старшего коэффициента $(n-1)\alpha_{n-1}$, введем разбиение области O_{00} на области $O_{00\tau\rho}$; $O_{00\tau 0}$ и O_{000}, и совершенно так же, как и в § 5, положим $\sigma = 1 - \tau + \rho$ в $O_{00\tau\rho}$; $\sigma = 1 - \tau$ в $O_{00\tau 0}$ и назначим опасные зоны из сегментов длин $p^{1-\sigma\nu}$; $\nu = \frac{1}{n}$ *. Тогда будем иметь

$$V_{00\tau\rho} \text{ или } V_{00\tau 0} < \frac{c_2}{p^{\frac{n(n-1)}{2} - \sigma n}}, \quad |f_1'(x)| > \frac{c_3}{p^{1-\sigma\nu}}.$$

Если теперь $\frac{c_3}{p^{1-\sigma\nu}} < \frac{1}{p}$, то $p^{\sigma} < c_3'$;

$$p^{1-\tau} < c_3'; \quad |\alpha_{n-1}| < \frac{1}{p^{n-2+\tau}} = \frac{1}{p^{n-1-(1-\tau)}} < \frac{c_3'}{p^{n-1}}.$$

Таким образом, учитывая вдобавок, что число областей $O_{00\tau\rho}$ и $O_{00\tau 0}$ будет $\ll (\ln p)^2$, получим

$$\int \underset{O_{00}}{\ldots} \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega \ll \frac{1}{p^n} \frac{p^{b_1}}{p^{n(n-1)}} (\ln p)^2 +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2n^2p^n}}^{\frac{1}{2n^2p^n}} d\alpha_n \int_{-\frac{c_3'}{p^{n-1}}}^{\frac{c_3'}{p^{n-1}}} d\alpha_{n-1} \ldots \int_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}.$$

Вводя теперь $f_2(x) = \alpha_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \alpha_1 x$ и замечая, что в области интегрирования последнего интеграла $|f'(x) - f_2'(x)| < \frac{c_4'}{p}$, можем провести для него такие же рассуждения и разбить его на части

$$O\left(\frac{p^{b_1}(\ln p)^2}{p^n p^{n-1} p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}\right) +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2n^2p^n}}^{\frac{1}{2n^2p^n}} d\alpha_n \int_{-\frac{c_3'}{p^{n-1}}}^{\frac{c_3'}{p^{n-1}}} d\alpha_{n-1} \int_{-\frac{c_3''}{p^{n-2}}}^{\frac{c_3''}{p^{n-2}}} d\alpha_{n-2} \ldots \int_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}.$$

Продолжая далее те же рассуждения, придем к оценке

$$\int \underset{O_{00}}{\ldots} \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega \ll \frac{p^{b_1}(\ln p)^2}{p^{n(n+1)}} +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2n^2p^n}}^{\frac{1}{2n^2p^n}} d\alpha_n \int_{-\frac{c_3'}{p^{n-1}}}^{\frac{c_3'}{p^{n-1}}} d\alpha_{n-1} \ldots \int_{-\frac{c_3^{(n-1)}}{p}}^{\frac{c_3^{(n-1)}}{p}} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}.$$

* Вместо более узких $p^{1-\frac{\sigma}{n-1}}$.

Беря в последнем интеграле тривиальную оценку $|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \ll p$, получим, что он $\ll \frac{p^{b_1}}{p^{n(n+1)}}$. Вспоминая, что число областей $O_{\mp\rho}$ и $O_{\mp 0} \ll (\ln p)^2$, и складывая оценки интегралов по всем областям, найдем

$$J' \ll \frac{p^{b_1}(\ln p)^2}{p^{n(n+1)}} < c_8 \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{n(n+1)}}.$$

7

Теперь приступим к оценке J для случая, когда $\gamma = \frac{r}{n}$, где $r = [n^{\frac{1}{5}}]$; $b_1 = C_0 n^2 \ln n$: C_0 фиксируем в дальнейшем. Имеем

$$J = \int_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1};$$

$$\delta_x = \frac{1}{p^{\left(1-\frac{r}{n}\right)x}}.$$

Мы лишь увеличим J, если расширим его пределы и введем

$$J' = \int_{-\delta'_n}^{\delta'_n} d\alpha_n \int_{-\delta'_{n-1}}^{\delta'_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int_{-\delta'_1}^{\delta'_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1},$$

где

$$\delta'_n = \frac{1}{p^{n-r}}; \quad \delta'_{n-1} = \frac{1}{p^{n-r-1}}; \ldots; \delta'_{r+1} = \frac{1}{p};$$

$$\delta'_j = \delta_j = \frac{1}{p^{\left(1-\frac{r}{n}\right)}}, \qquad (j = r, r-1, \ldots, 1).$$

Область интегрирования интеграла J' обозначим через $\mathfrak{A}$. Разобьем $\mathfrak{A}$ на три подобласти $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ состоит из точек $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$ с условием

$$\frac{1}{p^n} \leqslant |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{p^{n-r}};$$

$\mathfrak{A}_2$ состоит из точек $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$ таких, что

$$\frac{1}{p^{n+\frac{r}{n}}} \leqslant |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{p^n};$$

$\mathfrak{B}$ содержит остальные точки, так что в $\mathfrak{B}$

$$|\alpha_n| < \frac{1}{p^{n+\frac{r}{n}}}$$

Обратимся к области $\mathfrak{A}_1$. Сегмент $\left[\frac{1}{p^n}, \frac{1}{p^{n-r}}\right]$ разобьем справа налево на $\ll \ln p$ сегментов вида

$$\Delta_m = \left[\frac{1}{2n^2 p^{n-r+m}}, \frac{1}{p^{n-r+m}}\right]; \qquad m \in [0, r].$$

Крайний левый сегмент будет иметь вид

$$\Delta_{m_l} = \left[\frac{1}{p^n}, \frac{1}{p^{n-r+m_l}}\right]; \quad \frac{1}{2n^2 p^{n-r+m_l}} \quad \text{будет} \ll \frac{1}{p^n}.$$

Для данного m будем иметь

$$\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{pa_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{p^2a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{r+1}}{p^{n-r-1}a_n}\right|\right\} \leqslant 2n^2p^m.$$

В самом деле, иначе имели бы для какого-то $\varkappa$

$$|\alpha_{n-k}| > \frac{2n^2p^mp^\varkappa}{2n^2p^{n-r+m}} = \frac{1}{p^{n-r-\varkappa}} = \delta'_{n-\varkappa},$$

что невозможно. Соответственно сегменту Δ_m введем сегмент $[8^n n!, 2n^2p^m]$ (если $2n^2p^m > 8^n n!$) и разобьем его, идя справа налево, на $\ll \ln p$ сегментов $\Delta_{mq} = \left[\frac{1}{2}p^q, p^q\right]$, из которых крайний левый будет вида $\Delta_{mq_l} = [8^n n!, p^{q_l}]$; $p^q \leqslant 2n^2p^m$. При помощи их построим $\ll (\ln p)^2$ областей вида $\mathfrak{A}_{1mq}$ и $\mathfrak{A}_{1m0}$, причем:

область $\mathfrak{a}_{1mq}$ состоит из точек с условиями

1) $|\alpha_n| \in \Delta_m$;

2) $\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{pa_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{p^2a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{r+1}}{p^{n-r-1}a_n}\right|\right\} \in \Delta_{mq}$;

3) $|\alpha_j| \leqslant \delta'_j$ $(j = r, r-1, \ldots, 1)$;

область $\mathfrak{a}_{1m0}$ содержит такие точки, что

1) $|\alpha_n| \in \Delta_m$;

2) $\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{pa_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{r+1}}{p^{n-r-1}a_n}\right|\right\} \leqslant 8^n n!$;

3) $|\alpha_j| \leqslant \delta'_j$ $(j = r, r-1, \ldots, 1)$;

каждая точка $\mathfrak{a}_1$ попадет в $\mathfrak{a}_{1mq}$, либо $\mathfrak{a}_{1m0}$.

Мы имеем

$$\int_{\mathfrak{a}_1}\cdots\int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega = \sum \int_{\mathfrak{a}_{1mq}}\cdots\int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega + \sum \int_{\mathfrak{a}_{1m0}}\cdots\int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega.$$

Рассмотрим для какой-либо фиксированной области $\mathfrak{a}_{1mq}$ интеграл по ней

$$J'_{1mq} = \int_{\mathfrak{a}_{1mq}}\cdots\int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega.$$

Составим число $r' = r - m + q$ и пусть

$$r' = r'' + \theta,$$

где

$$r'' = \begin{cases}[r'], & \text{если } r' \text{ нецелое,}\\ r'-1, & \text{если } r' \text{ целое}\end{cases}$$

и $0 < \theta \leqslant 1$.

По числам r'' и θ определим целое число v так:

$$v = \begin{cases} r''+1, & \text{если } \theta \leqslant \frac{19}{20},\\ r''+2, & \text{если } \theta > \frac{19}{20}.\end{cases}$$

Мы имеем $r' = r - m + q \leqslant r + \frac{\ln 2n^2}{\ln p}$, ибо $p^q \leqslant 2n^2p^m$. Далее $m \leqslant r$. Если $r' = r - m + q < 1 - \frac{\ln 2n^2}{\ln p}$, то $\mathfrak{a}_{1mq} < O$ (O — область, разбиравшаяся в § 6).

В самом деле, m тогда должно быть $> r-1+\frac{\ln 2n^2}{\ln p}$

$$|\alpha_{n-\varkappa}| < \frac{1p^{\varkappa}p^q}{p^{n-r+m}} = \frac{p^{\varkappa}}{p^{n-r'}} < \frac{1}{2n^2p^{n-1-\varkappa}}; \quad (\varkappa = 1,2, \ldots, n-r-1)$$

$$|\alpha_n| < \frac{1}{2n^2p^{n-1}};$$

$$|\alpha_j| \leqslant \frac{1}{p^{\left(1-\frac{r}{n}\right)j}} < \frac{1}{2n^2p^{j-1}} \quad (j = r, r-1, \ldots, 1),$$

ибо $\frac{r^2}{n} < 1$.

Будем считать поэтому, что $r' \geqslant 1 - \frac{\ln 2n^2}{\ln p}$.

Отсюда $v \geqslant 2$. Далее видим, что $v \leqslant r+1$.

8

Пользуясь этим числом v, оценим объем V_{1mq} области $\mathfrak{a}_{1mq}$. В этой области, и даже более широкой, будут выполняться неравенства

$$0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{p^{n-r+m}}$$

$$0 \leqslant |\alpha_{n-\varkappa}| = |\alpha_n| \cdot \left|\frac{\alpha_{n-\varkappa}}{\alpha_n p^{\varkappa}}\right| p^{\varkappa} \leqslant \frac{1}{p^{n-r+m}} p^q p^{\varkappa} \quad (\varkappa = 1,2, \ldots, n-r-1)$$

$$|\alpha_j| \leqslant \delta'_j = \frac{1}{p^{j\left(1-\frac{r}{n}\right)}} \quad (j = r, r-1, \ldots, 1).$$

Отсюда

$$V_{1mq} \leqslant c_5 \frac{1}{p^{n-r+m}} \frac{pp^q}{p^{n-r+m}} \cdots$$

$$\cdots \frac{p^{n-r-1}p^q}{p^{n-r+m}} \frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^r p^{r-1} \ldots p}.$$

Можно утверждать, что

$$V_{1mq} < c_5 \frac{p^q}{p^{n-r+m}} \frac{pp^q}{p^{n-r+m}} \cdots \frac{p^{n-v}p^q}{p^{n-r+m}}.$$

В самом деле, $n-2 \geqslant n-v \geqslant n-r-1$ и $\frac{p^{n-r}p^q}{p^{n-r+m}} = \frac{p^q}{p^m} \geqslant \frac{1}{p^r}$, ибо $m \leqslant r$;

$$\frac{p^{n-r+1}p^q}{p^{n-r+m}} \geqslant \frac{1}{p^{r-1}};$$

$$\frac{p^{n-v}p^q}{p^{n-r+m}} \geqslant \frac{p^{r-v}}{p^r} = \frac{1}{p^v}; \quad v \geqslant 2; \quad \frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p} < 1.$$

Далее имеем

$$V_{1mq} < c_5 \frac{p^{\frac{(n-v)(n-v+1)}{2}}}{p^{(n-(r-m+q))(n-v+1)}}.$$

Но $r' = r-m+q < v$, поэтому $p^{n-v} < p^{n-(r-m+q)}$.

Отсюда

$$V_{1mq} < c_5 \frac{p^{\frac{(n-v)(n-v+1)}{2}}}{p^{(n-v)(n-v+1)}} < c_5 \frac{1}{p^{\frac{n(n+1)}{2}-vn}}. \quad (8'')$$

Это позволяет нам заметить, что если в области a_{1mq} справедлива оценка

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} \leqslant c_8 p^{b_1 - vn + \varepsilon},$$

то

$$\int_{a_{1mq}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega < c_8' \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

9

Пусть $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$ фиксированная точка a_{1mq}. Составим значения $f(x)$ и ее производных:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x; \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \\ f'(x) &= c_{1n}\alpha_n x^{n-1} + c_{1,n-1}\alpha_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_{11}\alpha_1; \\ f''(x) &= c_{2n}\alpha_n x^{n-2} + c_{2,n-1}\alpha_{n-1} x^{n-3} + \ldots + c_{22}\alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n-1)}(x) &= c_{n-1,n}\alpha_n x + c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1}, \\ f^{(n)}(x) &= c_{nn}\alpha_n. \end{aligned}$$

Выпишем корни $f(x)$ и ее $n-1$ производных. Пусть будут

$$\begin{array}{ll} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n & \text{корни } f(x) \\ \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{n-1}' & \text{корни } f'(x) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \xi_1^{(v)}, \xi_2^{(v)}, \ldots, \xi_{n-v}^{(v)} & \text{корни } f^{(v)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \xi_1^{(n-1)} & \text{корень } f^{(n-1)}(x) \end{array}$$

Пусть $\xi_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} + it_x^{(j)}$; каждому $\xi_x^{(j)}$ сопоставим «опасную зону» для x, определяемую условием

$$|x - \sigma_x^{(j)}| \leqslant p^{1-\nu_v}, \quad \nu_v = \frac{\nu}{100n}.$$

Эта зона, которую мы обозначим через L, состоит из $s < n^2$ сегментов длины $\ll p^{1-\nu_v}$ и содержит $\ll p^{1-\nu_v}$ целых значений x.

Пусть дано какое-либо целое $x \bar{\in} L$; $x \in [0, p]$.

Оценим сверху и снизу величину

$$\left| \frac{f^{(v)}(x)}{v!} \right|.$$

Оценка сверху.

$$\left| \frac{f^{(v)}(x)}{v!} \right| < c_8 \left[\frac{p^{n-v}}{p^{n-r+m}} + \frac{p^q p p^{n-1-v}}{p^{n-r+m}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{p^q p^{n-r-1} p^{r+1-v}}{p^{n-r+m}} + \frac{p^{r-v}}{p^{r\left(1-\frac{r}{n}\right)}} + \ldots + \frac{p^0}{p^{v\left(1-\frac{r}{n}\right)}} \right].$$

Далее,

$$\frac{p^{n-v}}{p^{n-r+m-q}} = \frac{1}{p^{v-(r-m+q)}} \leqslant \frac{1}{p^{\frac{1}{20}}}.$$

Значит

$$\left|\frac{f^{(v)}(x)}{v!}\right| \leqslant \frac{c_7}{p^{\frac{1}{20}}}.$$

Оценка снизу. Обозначая $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_v$ константы, образующиеся при коэффициентах $f(x)$ при v-кратном дифференцировании, найдем

$$f^{(v)}(x) = a_n\alpha_n\left(x^{n-v} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\beta_1 x^{n-1-v} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\beta_2 x^{n-2-v} + \ldots + \frac{a_v}{a_n}\beta_{n-v}\right),$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{n-1}}{p\alpha_n}p,$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_{n-2}}{p^2\alpha_n}p^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_\varkappa = \frac{\alpha_{n-\varkappa}}{p^\varkappa\alpha_n}p^\varkappa,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-r-1} = \frac{\alpha_{r+1}}{p^{n-r-1}\alpha_n}p^{n-r-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-v} = \frac{\alpha_v}{p^{n-v}\alpha_n}p^{n-v}.$$

$v \leqslant r+1$ и, следовательно, по определению α_{1mq} будем иметь для какого-либо $\varkappa_0 \in [1, n-r-1]$

$$|\beta_{\varkappa_0}| \geqslant p^q p^{\varkappa_0} = p^{\varkappa_0+q}.$$

Далее

$$(-1)^{\varkappa_0}\beta_{\varkappa_0} = \sum_{i_1, \ldots, i_{\varkappa_0}} \xi_{i_1}^{(v)} \ldots \xi_{i_{\varkappa_0}}^{(v)}.$$

Поэтому хоть для одного слагаемого, скажем, для $\xi_1^{(v)} \ldots \xi_{\varkappa_0}^{(v)}$, будем иметь

$$\left|\xi_1^{(v)} \ldots \xi_{\varkappa_0}^{(v)}\right| > \frac{p^{\varkappa_0+q}}{n!}.$$

Не все величины $\xi_j^{(v)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$ могут удовлетворять неравенствам $|\xi_j^{(v)}| \leqslant 2p$, иначе имели бы

$$\left|\xi_1^{(v)} \ldots \xi_{\varkappa_0}^{(v)}\right| \leqslant 2^{\varkappa_0}p^{\varkappa_0} < \frac{p^{\varkappa_0+q}}{n!}, \text{ ибо } p^q > 8^n n!$$

Поэтому среди них будет f $(\varkappa_0 \geqslant f \geqslant 1)$ величин с условием $|\xi_i^{(v)}| \geqslant 2p$ $(i = 1, 2, \ldots, f)$. Для остальных же будет $|\xi_{f+1}^{(v)}| < 2p, \ldots, |\xi_{\varkappa_0}^{(v)}| < 2p$. Тогда получим

$$\left|\xi_1^{(v)}\right| \ldots \left|\xi_{f+1}^{(v)}\right| \geqslant \frac{p^{\varkappa_0+}}{n!\, 2^{\varkappa_0-f}\, p^{\varkappa_0-f}} > \frac{1}{2^n n!}p^{f+q}.$$

Далее, при $|\xi_i^{(v)}| \geqslant 2p$ будем иметь, очевидно $|x - \xi_i^{(v)}| \geqslant \frac{1}{2}|\xi_i^{(v)}|$. Отсюда

$$\left|x - \xi_1^{(v)}\right| \ldots \left|x - \xi_f^{(v)}\right| \geqslant c_8 p^{f+q}.$$

Теперь имеем

$$|f^{(v)}(x)| = a_n |\alpha_n| \, |x - \xi_1^{(v)}| \, |x - \xi_2^{(v)}| \dots |x - \xi_{n-v}^{(v)}| \geqslant$$
$$\geqslant c_8 \frac{1}{2n^2 p^{n-r+m}} p^{f+q} p^{(1-\nu_2)(n-v-f)} =$$
$$= \frac{c_8}{2n^2} \frac{1}{p^{v-(r-m+q)} p^{\nu_0 (n-v-f)}} > \frac{c_8}{2n^2} \frac{1}{p^{v-(r-m+q)} p^{\nu_0 n}}.$$

Далее. $\nu_0 = \frac{v}{100n}$; $v - (r - m + q) < \frac{21}{20}$. Отсюда

$$\left| \frac{f^{(v)}(x)}{v!} \right| > c_9 \frac{1}{p^{\frac{21}{20} + \frac{v}{100}}}.$$

Значит

$$\frac{c_9}{p^{\frac{21}{20} + \frac{v}{100}}} \leqslant \left| \frac{f^{(v)}(x)}{v!} \right| \leqslant \frac{c_7}{p^{\frac{1}{20}}}.$$

10

Теперь оценим сверху $f^{(v+1)}(x), f^{(v+2)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$. Имеем *

$$\frac{f^{(v+1)}(x)}{f^{(v)}(x)} = \sum_{i=1}^{n-v} \frac{1}{x - \xi_i^{(v)}} \ll \frac{1}{p^{1-\nu_0}},$$
$$\frac{f^{(v+2)}(x)}{f^{(v+1)}(x)} = \sum_{i=1}^{n-v-1} \frac{1}{x - \xi_i^{(v+1)}} \ll \frac{1}{p^{1-\nu_0}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)} \ll \frac{1}{p^{1-\nu_0}}.$$

Отсюда

$$|f^{(v+s)}(x)| < c' \, |f^{(v)}(x)| \frac{1}{p^{(1-\nu_0)s}}.$$

11

Положим для данного $x \in L$, $\left| \frac{f^{(v)}(x)}{v!} \right| = \frac{1}{p^t}$. Тогда

$$\frac{c_7}{p^{\frac{1}{20}}} \geqslant \frac{1}{p^t} \geqslant \frac{c_9}{p^{\frac{21}{20} + \frac{\nu}{100}}}.$$

Введем величину Z, зависящую от t и ν, следующим образом:

$$Z = \begin{cases} p^{\frac{t}{\nu - 1}}, & \text{если } \nu \geqslant 4, \\ p^{\frac{2}{5} t}, & \text{если } \nu = 3, \\ p^{\frac{10}{19} t}, & \text{если } \nu = 2 \end{cases}$$

и оценим сумму $S' = \sum_{z=1}^{[Z]} e^{2\pi i f(x+z)}$.

* Этой простой и эффективной цепи оценок я обязан любезности Д. К. Фаддеева.

Имеем

$$f(x+z)=f(x)+z\frac{f'(x)}{1!}+z^2\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{z^{\nu}f^{(\nu)}(x)}{\nu!}+$$

$$+\frac{z^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x)}{(\nu+1)!}+\ldots+\frac{z^n f^{(n)}(x)}{n!}.$$

При $\nu\geqslant 4$ получим

$$\left|\frac{Z^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x)}{(\nu+1)!}\right|\ll\frac{Z^{\nu-1}}{p^t}\frac{Z^2}{p^{1-\nu_\nu}}\ll$$

$$\ll 1\cdot\frac{p^{\left(\frac{21}{20}\frac{1}{\nu-1}+\frac{\nu}{\nu-1}\frac{1}{100}\right)^2}}{p^{1-\frac{\nu}{100\,n}}}.$$

Далее

$$\frac{21}{10}\frac{1}{\nu-1}+\frac{2\nu}{\nu-1}\frac{1}{100}\leqslant\frac{21}{10}\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\frac{1}{100}<0{,}73;$$

$$\frac{\nu}{100\,n}<\frac{1}{100}.$$

Значит, при $\nu\geqslant 4$, $|z|\leqslant Z$

$$\left|\frac{Z^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x)}{(\nu+1)!}\right|\ll\frac{1}{p^{0,26}};\quad\left|\frac{z^{\nu+2}f^{(\nu+2)}(x)}{(\nu+2)!}\right|\ll$$

$$\ll\frac{Z^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x)}{(\nu+1)!}\frac{Z}{p^{1-\nu_\nu}}\ll\frac{1}{p^{0,26}};\quad\left|\frac{z^n f^{(n)}(x)}{n!}\right|\ll\frac{1}{p^{0,26}}.$$

Отсюда имеем

$$e^{2\pi i f(x+z)}=e^{2\pi i\left(f(x)+\frac{zf'(x)}{1!}+\ldots+\frac{z^{\nu}f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right)}+O\left(\frac{1}{p^{0,26}}\right).$$

Полагая

$$\varphi(z)=\frac{z^{\nu}f^{(\nu)}(x)}{\nu!}+\frac{z^{\nu-1}f^{(\nu-1)}(x)}{(\nu-1)!}+\cdots+f(x),$$

найдем

$$S'=\sum_{z=1}^{[Z]}e^{2\pi i f(x+z)}=\sum_{z=1}^{[Z]}e^{2\pi i\varphi(z)}+O\left(\frac{Z}{p^{0,26}}\right).$$

В случае $\nu=3$ имеем

$$Z=p^{\frac{2}{5}t}\ll p^{\frac{2}{5}\frac{21}{20}+\frac{2}{5}\frac{3}{100}}<p^{0,44},$$

$$\left|\frac{z^4f^{(4)}(x)}{4!}\right|\ll\frac{Z^{\frac{5}{2}}}{p^t}\frac{Z^{\frac{3}{2}}}{p^{1-\nu_\nu}}\ll\frac{Z^{\frac{3}{2}}}{p^{0,99}}\ll\frac{1}{p^{0,33}},$$

$$\left|\frac{z^5f^{(5)}(x)}{5!}\right|\ll\frac{Z}{p^{1-\nu_3}}\ll\frac{1}{p^{0,38}},$$

. . . .

$$\left|\frac{z^n f^{(n)}(x)}{n!}\right|\ll\frac{1}{p^{0,33}}.$$

В случае $\nu=2$ имеем

$$Z=p^{\frac{10}{19}t}\ll p^{\frac{10}{19}\frac{21}{20}+\frac{11}{19}\frac{2}{100}},$$

$$\left|\frac{z^3f^{(3)}(x)}{3!}\right|\ll\frac{Z^{\frac{11}{10}}}{p^{0.99}}\ll\frac{p^{\frac{11}{19}\frac{21}{20}+\frac{11}{10}\frac{2}{100}}}{p^{0,99}}\ll\frac{p^{0,67}}{p^{0,99}}\ll\frac{1}{p^{0,32}}$$

. . . .

$$\left|\frac{z^nf^{(n)}(x)}{n!}\right|\ll\frac{1}{p^{0,32}}.$$

Отсюда и подавно для $\nu=3$ и $\nu=2$ получим соответственно

$$S'=\sum_{z=1}^{[Z]}e^{2\pi i\left(z^3\frac{f'''(x)}{3!}+z^2\frac{f''(x)}{2!}+Z\frac{f'(x)}{1!}+f(x)\right)}+O\left(\frac{Z}{p^{0,26}}\right),$$

$$S'=\sum_{z=1}^{[Z]}e^{2\pi i\left(\frac{z^2f''(x)}{2!}+\frac{zf'(x)}{1!}+f(x)\right)}+O\left(\frac{Z}{p^{0,26}}\right).$$

12

Теперь оценим суммы S'.

1° При $\nu\geqslant 14$ применим такой частный случай оценок И. М. Виноградова [1]: если

$$S''=\sum_{z=1}^{[Z]}e^{2\pi i\varphi(z)};\quad \varphi(z)=\alpha z^\nu+\alpha_1z^{\nu-1}+\cdots+\gamma;$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2};\quad (a,q)=1;\quad [Z]\leqslant q\leqslant 4^\nu[Z]^{\nu-1},$$

то

$$|S''|\ll Z^{1-\frac{1}{10\nu^3\ln\nu}}. \tag{10}$$

Проверим, будет ли $\alpha=\left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|$ удовлетворять нашим требованиям. Имеем

$$\alpha=\frac{1}{Z^{\nu-1}}<1.$$

Положим $\tau=4^\nu[Z]^{\nu-1}$ и пусть $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, где $\frac{a}{q}$ — последняя подходящая дробь с $q\leqslant\tau$.

Число $a\neq 0$, иначе имели бы $|\alpha|<\frac{1}{4^\nu[Z]^{\nu-1}}<\frac{1}{2^\nu Z^{\nu-1}}$, но $\alpha=\frac{1}{Z^{\nu-1}}$. Если $a\neq 0$, то $q>[Z]$, иначе имели бы $|\alpha|>\frac{1}{2Z}$, что невозможно уже при $\nu>2$.

Итак, $[Z]<q\leqslant 4^\nu[Z]^{\nu-1}$ и оценка (10) для $|S''|$ имеет место.

2°. При $14>\nu\geqslant 4$ придется использовать такие оценки Вейля (1): если

$$\varphi(z)=\alpha z^\nu+\cdots+\gamma;$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2};\quad (a,q)=1,$$

то

$$\left|\sum_{z=1}^{[Z]} e^{2\pi i\varphi(z)}\right| < c_\varepsilon Z^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{q}+\frac{q}{Z^\nu}\right)^{\frac{1}{2^{\nu-1}}}.$$

Для нашего случая получим

$$[Z] < q \leqslant 4^\nu [Z]^{\nu-1};$$

$$|S''| < c_\varepsilon Z^{1+\varepsilon} Z^{-\frac{1}{2^{\nu-1}}} < c_\varepsilon Z^{1+\varepsilon} Z^{-\frac{1}{2^{13}}}.$$

Беря $\varepsilon = \frac{1}{2^{14}}$, найдем

$$|S''| \ll Z^{1-\frac{1}{2^{14}}} \text{ для } 14 > \nu \geqslant 4.$$

3°. При $\nu = 3$ берем $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q\tau}$; $\tau = 100[Z]^{\frac{5}{2}}$. Так как у нас $\alpha = \frac{1}{Z^{\frac{5}{2}}}$, то $[Z] < q \leqslant 100 Z^{\frac{5}{2}}$ и $|S''| < c_\varepsilon Z^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{Z^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}} \ll Z^{1-\frac{1}{9}}$ при $\varepsilon = \frac{1}{100}$, и подавно $|S''| \ll Z^{1-\frac{1}{2^{14}}}$.

При $\nu = 2$, $\alpha = \frac{1}{Z^{\frac{19}{10}}}$ берем $\tau = 100[Z]^{\frac{19}{10}}$ и так как q тогда $> [Z]$ и $\leqslant 100 Z^{\frac{19}{10}}$, то $|S''| < c_\varepsilon Z^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{Z^{\frac{1}{10}}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll Z^{1-\frac{1}{21}}$ при $\varepsilon = \frac{1}{100}$ и в этом случае

$|S''| \ll Z^{1-\frac{1}{2^{14}}}$.

Итак, имеем оценки

$$|S''| \ll \begin{cases} Z^{1-\frac{1}{10\nu^3 \ln \nu}} & \text{при } \nu \geqslant 14, \\ Z^{1-\frac{1}{2^{14}}} & \text{при } 2 \leqslant \nu < 14. \end{cases} \qquad (11)$$

13

Дадим теперь оценку $S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ в G_{1mq}. На сегменте $[0, p]$ отметим опасные зоны $\mathfrak{L}$ из $s \leqslant n^2$ сегментов длин $\ll p^{1-\nu\vartheta}$.

Совершаем такую операцию: берем крайний левый $x_0 \overline{\in} \mathfrak{L}$, вычисляем $\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$ и по нему $Z_0 = Z(x_0)$; затем полагаем $x_1 = x_0 + [Z_0]$; если $x_1 \overline{\in} \mathfrak{L}$, вычисляем $Z_1 = Z(x_1)$ и полагаем $x_2 = x_1 + [Z_1]$ и т. д., пока не придем к x_i такому, что $x_i + [Z_i] \in \mathfrak{L}$. Тогда берем в качестве x_{i+1} крайний левый x, который $> x_i + [Z_i]$ и $\overline{\in} \mathfrak{L}$.

Продолжая так двигаться далее слева направо, покроем все целые точки сегмента $[0, p]$, которые $\overline{\in} \mathfrak{L}$, сегментами $[Z_i]$, может быть даже часть опасной зоны будут покрыта ими. Существенно, что левые концы наших сегментов не будут принадлежать $\mathfrak{L}$.

Оценим $[Z_i]$, Имеем

1) при $\nu \geqslant 4$; $c_{10}\, p^{\frac{1}{20(\nu-1)}} \leqslant [Z_i] \leqslant p^{\frac{21}{20(\nu-1)}+\frac{\nu}{\nu-1}\frac{1}{100}}$,

2) $[Z_i] > c_{10} p^{\frac{1}{50}}$ при $\nu = 3$,

3) $[Z_i] > c_{10}\, p^{\frac{1}{38}}$ при $\nu = 2$.

Во всех этих случаях $[Z_i] > c_7'\, p^{\frac{1}{20\nu}}$. Поэтому число наших сегментов будет $\ll p^{1-\frac{1}{20\nu}}$.

Далее, для каждой из сумм вида

$$S' = \sum_{z=1}^{[Z/i]} e^{2\pi i\,(x_i+z)}$$

будем иметь согласно вышеизложенному: при $\nu \geqslant 14$

$$|S'| \ll Z_i^{1-\frac{1}{10\nu^3 \ln \nu}} + \frac{Z}{p^{0,26}} \ll \frac{Z_i}{p^{\frac{1}{200\nu^4 \ln \nu}}},$$

$$\text{(ибо } Z_i > c_7' p^{\frac{1}{20\nu}}\text{); при } 2 \leqslant \nu < 14;$$

$$|S'| \ll Z_i^{1-\frac{1}{2^{14}}} + \frac{Z_i}{p^{0,26}} \ll \frac{Z_i}{p^{\frac{1}{20\cdot 13\cdot 2^{14}}}}.$$

Непокрытым сегментами длин $[Z_i]$ будет только $\mathfrak{L}$ или часть его. Отсюда и получаем основную оценку

$$|S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)| \ll \frac{p}{p^{\frac{1}{200\nu^4 \ln \nu}}} + p^{1-\vartheta} + p^{1-\frac{1}{20\nu}} \ll$$

$$\ll p^{1-\frac{1}{200\nu^4 \ln \nu}} + p^{1-\vartheta_\nu}, \quad \left(\vartheta_\nu = \frac{\nu}{100\, n}\right); \quad \text{при } \nu \geqslant 14;$$

$$|S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)| \ll p^{1-\frac{1}{20.13.2^{14}}} + p^{1-\frac{2}{100n}} + p^{1-\frac{1}{20.13}} \ll$$

$$\ll p^{1-\frac{1}{20.13.2^{14}}} + p^{1-\frac{2}{100n}} \quad \text{при } 14 > \nu \geqslant 2.$$

Рассмотрим $|S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)|^{b_1}$. Имеем:

при $\nu \geqslant 14$

$$\frac{b_1}{200\nu^4 \ln \nu} \geqslant \frac{C_0 n^3 \ln n}{200\nu^4 \ln \nu} > \nu n, \qquad \text{при} \qquad C_0 > 9600,$$

$$\text{ибо } \nu \leqslant r + 1 = [n^{\frac{1}{5}}] + 1 < 2n^{\frac{1}{5}};$$

$$b_1 \vartheta_\nu \geqslant \frac{C_0 n^2 \ln n\nu}{100n} > \nu n \text{ при } C_0 > 9600;$$

при $\nu < 14$

$$\frac{b_1}{20\cdot 13\cdot 2^{14}} > \frac{C_0 n^2 \ln n}{20\cdot 13\cdot 2^{14}} > 13n \geqslant \nu n \text{ при } C_0 \geqslant 20\cdot 13\cdot 14\cdot 2^{14};$$

$$\frac{b_1 2}{100n} \geqslant \frac{C_0 n^2 \ln n}{100n} > 13n \geqslant \nu n \text{ при } C_0 \geqslant 20\cdot 13\cdot 14\cdot 2^{14}.$$

Итак, при $C_0 \geqslant 20\cdot 13\cdot 14\cdot 2^{14}$ получим

$$|S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)^{b_1} \ll p^{b_1-\nu n}.$$

Отсюда имеем желаемый результат, учитывая (8″),

$$\int\limits_{G_{1mq}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots \alpha_n)|^{b_1} d\omega \leqslant \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

если G_{1mq} полностью не входит в O.

14

Теперь займемся областями G_{1mo}. Для них имеем

$$\alpha_n \in \Delta_m = \left[\frac{1}{2n^2 p^{n-2+m}}, \quad \frac{1}{p^{n-r+m}}\right]$$

$\left(\text{если } m = m_r, \text{ то слева стоит } \frac{1}{p^n}\right)$,

$$\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{pa_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{r+1}}{p^{n-r-1}a_n}\right|\right\} \leqslant 8^n n!$$

Положим здесь $r' = r - m$,

$$r'' = \begin{cases}[r'], & \text{если } r' \text{ нецелое,}\\ r' - 1, & \text{если } r' \text{ целое,}\end{cases}$$

$$r' = r'' + \theta; \quad 0 < \theta \leqslant 1.$$

$$v = \begin{cases} r'' + 1, \text{ если } \theta \leqslant \frac{19}{20}, \\ r'' + 2, \text{ если } \theta > \frac{19}{20}. \end{cases}$$

Здесь должно быть $p^{r'} \geqslant \frac{p}{2n^2 8^n n!}$, иначе мы имели бы

$$|\alpha_{n-k}| = \left|\frac{\alpha_{n-k}}{p\alpha_n}\right| |\alpha_n| p^k \leqslant \frac{8^n n!\, pp^k}{p^n 2n^2 8^n n} = \frac{1}{2n^2 p^{n-1-k}}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \quad n - r -).$$

А это приведет к тому, что $G_{1mo} \subset O$. Пусть G_{1mo} не входит целиком в O. Тогда

$$r' \ln p \geqslant \ln p - \ln(2n^2 8^n n!); \; r' \geqslant 1 - \frac{\ln c_{11}}{\ln p}; \; c_{11} = 2n^2 8^n n!$$

При $p > p_0$ будет либо $r' \geqslant 1$ либо $\theta > \frac{19}{20}$. Поэтому тогда $\nu \geqslant 2$; $\nu \leqslant r + 1$.

Подсчитаем объем G_{1mo}. Имеем

$$|\alpha_n| < \frac{1}{p^{n-r+m}}.$$

$$|\alpha_{n-k}| < \frac{p^k c_{11}}{p^{n-r+m}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n - r - 1).$$

$$|\alpha_j| \leqslant \delta_j' \quad (j = r, r-1, \ldots, 1).$$

Значит

$$V_{1mo} < c_{12} \frac{1}{p^{n-r+m}} \frac{p}{p^{n-r+m}} \cdots \frac{p^{n-r-1}}{p^{n-r+m}} \frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^{\nu} p^{r-1} \cdots p}.$$

Далее, $n-\nu \geqslant n-r-1$; $n-\nu \leqslant n-2$;

$$\frac{p^{n-r}}{p^{n-r+m}}=\frac{1}{p^m}\geqslant\frac{1}{p^r},$$

$$\frac{p^{n-r+1}}{p^{n-r+m}}\geqslant\frac{1}{p^{r-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p^{n-\nu}}{p^{n-r+m}}\geqslant\frac{1}{p^\nu}\quad(\nu\geqslant 2),$$

$$\frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p}<1.$$

Значит,

$$V_{12mo}<c_{12}\frac{p^{\frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2}}}{p^{(n-(r-m))(n-\nu+1)}}.$$

Далее $\nu\geqslant r-m$; $p^{n-\nu}\leqslant p^{n-(r-m)}$, и мы имеем

$$V_{1mo}<c_{12}\frac{p^{\frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2}}}{p^{(n-\nu)(n-\nu+1)}}<c_{12}\frac{1}{p^{\frac{n(n+1)}{2}-\nu n}}.$$

И опять нужно будет показать, что в области G_{1mo} будет

$$|S(\alpha_1,\ldots\alpha_n)|^{b_1}<c_\varepsilon p^{b_1-\nu n+\varepsilon}.$$

15

Оценим $\left|\frac{f^{\nu}(x)}{\nu!}\right|$ сверху и снизу при $x\in[0,p]$.

Оценка сверху.

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|<c_{13}\left[\frac{p^{n-\nu}}{p^{n-r+m}}+\frac{pp^{n-1-\nu}}{p^{n-r+m}}+\ldots+\frac{p^{n-r-1}p^{r+1-\nu}}{p^{n-r+m}}+\right.$$
$$\left.+\frac{p^{r-\nu}}{p^{r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}+\ldots+\frac{p^0}{p^{\nu\left(1-\frac{r}{n}\right)}}\right],$$

$$\frac{p^{n-\nu}}{p^{n-r+m}}=\frac{1}{p^{\nu-(r-m)}}<\frac{1}{p^{\frac{1}{20}}};\quad\frac{p^{r-\nu}}{p^{r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}<\frac{1}{p},\ldots,\frac{p^0}{p^{\nu\left(1-\frac{r}{n}\right)}}<\frac{1}{p}.$$

Значит $\left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|<c_{13}\frac{1}{p^{\frac{1}{20}}}$ при $x\in[0,p]$.

Оценка снизу. Отметим опасные зоны, как в § 9:

$$|x-\sigma_k^{(j)}|\leqslant p^{1-\vartheta_\nu};\quad\vartheta_\nu=\frac{\nu}{100n}.$$

Получим зону $\mathfrak{L}$ из $s\leqslant n^2$ сегментов, число целых $x\in\mathfrak{L}$ будет $\ll p^{1-\vartheta_\nu}$. Для фиксированного $x\in\mathfrak{L}$

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|>c'_{14}|\alpha_n||x-\xi_1^{(\nu)}|\ldots|x-\xi_{n-\nu}^{(\nu)}|\geqslant$$
$$\geqslant c'_{14}\frac{1}{p^{n-r+m}}(p^{1-\vartheta_\nu})^{n-4}\geqslant\frac{c_{14}}{p^{n-(r-m)+\vartheta_\nu n}};$$

$\nu-(r-m)\leqslant\frac{21}{20}$ по конструкции ν отсюда

$$\left|\frac{f^{\nu}(x)}{\nu!}\right|>c_{14}-\frac{1}{p^{\frac{21}{20}+\frac{\nu}{100}}}$$

Итак,

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|=\frac{1}{p^{t}},$$

$$\frac{c_{14}}{p^{\frac{21}{20}+\frac{\nu}{100}}}<\frac{1}{p^{t}}<\frac{c_{13}}{p^{\frac{1}{20}}};\quad 2\leqslant\nu\leqslant r+1.$$

Это позволяет нам, как и в §§ 12—14, получить оценку при $c_0\geqslant 20\cdot 13\cdot 14\cdot 2^{14}$

$$|S(\alpha_1,\,,\ldots,\alpha_n)|^{b_1}\ll p^{b_1-\nu n};$$

и следовательно,

$$\int\limits_{G_{1m0}}\ldots\int|S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|^{b_1}d\omega\ll\frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Здесь займемся областью G_2, определяемой условием

16

$$\frac{1}{p^n}\geqslant|\alpha_n|\geqslant\frac{1}{p^{n+\lambda}},\qquad\lambda=\frac{r}{n}.$$

Здесь α_n чрезвычайно близко к нулю, однако другие координаты могут быть удалены от нуля. По общему плану разобьем сегмент $\left[\frac{1}{p^{n+\lambda}},\ \frac{1}{p^n}\right]$ на $\ll\ln p$ сегментов вида

$$\Delta_\tau=\left[\frac{1}{2p^{n+\tau}},\ \frac{1}{p^{n+\tau}}\right];\quad 0\leqslant\tau\leqslant x;$$

крайний левый сегмент вида $\left[\frac{1}{p^{n+\lambda}},\frac{1}{p^{n+\tau r}}\right]=\Delta_{\tau r}$. Для осуществления этого разбиваем $\left[0,\ \frac{1}{p_n}\right]$ пополам; левую половину еще пополам и т. д., пока $(r+1)$-ое деление не выведет нас из сегмента $\left[\frac{1}{p^{n+\lambda}},\frac{1}{p^n}\right]$, и тогда останавливаемся на r-том делении.

Для каждого Δ_τ и точки $(\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)$ с $\alpha_n\in\Delta_\tau$ либо величина

$$\max\left\{\left|\frac{\alpha_{n-1}}{p^{\alpha_n}}\right|,\ldots,\left|\frac{\alpha_{r+1}}{p^{n-r-1}\alpha_n}\right|\right\}>\frac{p^{1+\tau}}{4n^2},$$

либо точка $(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)$ будет принадлежать O. В самом деле, из

$$\left|\frac{\alpha_{n-k}}{p^k\alpha_n}\right|\leqslant\frac{1}{4n^2}p^{1+\tau}$$

следует

$$|\alpha_{n-k}|<p^k\frac{1}{4n^2}\frac{p^{1+\tau}}{p_{n+\tau}}=\frac{1}{4n^2p^{n-1-k}}\qquad(k=1,2,\ldots n-r-1),$$

и наша точка принадлежала бы O.

Далее, наш максимум не может превзойти $2p^{r+\tau}$, иначе при некотором $k \in [1, n-r-1]$

$$|\alpha_{n-k}| > \frac{p^k}{2p^{n+\tau}} 2p^{r+\tau} = \frac{1}{p^{n-r-k}} = \delta'_{n-k},$$

что невозможно.

Соответственно каждому Δ_τ рассмотрим сегмент $\left[\frac{1}{4n^2}p^{1+\tau},\ 2p^{r+\tau}\right]$. Разобьем его, как обычно, на $\ll \ln p$ сегментов $\Delta_{\tau q} = \left[\frac{1}{4n^2}p^q, 2p^q\right]$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $8n^2$)

$$1+\tau \leqslant q \geqslant r+\tau.$$

Крайний левый сегмент будет иметь вид

$$\left[\frac{1}{4n^2}p^{1+\tau}, 2p^{gr}\right].$$

Разбиваем G_2 на $\ll (\ln p)^2$ областей $G_{2\tau q}$* с условием $M \in G_{2\tau q}$, если

1) $|\alpha_n| \in \Delta_\tau$,

2) $\max\left\{\left|\frac{\alpha_{n-1}}{p\alpha_n}\right|, \ldots, \left|\frac{\alpha_{r+1}}{p^{n-r-1}\alpha_n}\right|\right\} \in \Delta_{\tau q}$,

3) $|\alpha_j| \leqslant \delta'_j$ $(j=r, r-1, \ldots, 1)$.

Подсчитаем объем $V_{2\tau q}$ области $G_{2\tau q}$:

$$V_{2\tau q} < c_{15}\frac{1}{p^{n+\tau}}\frac{pp^q}{p^{n+\tau}}\cdots\frac{p^{n-r-1+q}}{p^{n+\tau}}\frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^{\frac{r(r+1)}{2}}} < c_{15}\frac{p^{\frac{(n-r-1)(n-r)}{2}}}{p^{(n+\tau-q)(n-r)}}\frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^{\frac{r(r+1)}{2}}};$$

$$n+\tau-q-\frac{n}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}+\tau-q+\frac{r}{2},$$

$$(n+1+\tau-q)(n-r)=\frac{n(n+1)}{2}-(q-\tau)(n-r)-\frac{r(n+1)}{2}+\frac{r}{2}n-\frac{r^2}{2};$$

$$\frac{r}{2}n-\frac{r(n+1)}{2}+\frac{r(r+1)}{2}=0.$$

Далее $\dfrac{p^{\frac{r(r+1)}{2n}}}{p^q} < 1$, ибо $q \geqslant 1$. Значит

$$V_{2\tau q} < c_{15}\frac{1}{p^{\frac{n(n+1)}{2}-(q-\tau)n}}. \tag{12}$$

17

Полагаем $q-\tau=r'=r''+\theta$; r'' целое; $0<\theta\leqslant 1$.

$$r''=\begin{cases}[r'], & \text{если } r' \text{ нецелое,}\\ r'-1, & \text{если } r' \text{ целое,}\end{cases}$$

$$\nu=\begin{cases}r''+1, \text{ если } \theta\leqslant\frac{19}{20},\\ r''+2, \text{ если } \theta>\frac{19}{20}.\end{cases}$$

---

* Будем брать лишь такие $G_{2\tau q}$, которые не целиком входят в O.

Тогда, так как $q \geqslant 1+\tau$; $q \leqslant r+\tau$, то $r' \geqslant 1$; $\nu \geqslant 2$; $\nu \leqslant r'+1 \leqslant r+1$; $\nu > r' = q-\tau$. Далее, $p^q > 8^n n!$ при $p > p_0$, ибо $q \geqslant 1+\tau$. Поэтому, повторяя оценки § 9, найдем

$$\frac{c_{17}}{p^{\frac{21}{20}+\frac{\nu}{100}}} < \left|\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right| < \frac{c_{11}}{p^{\frac{1}{20}}}$$

вне опасной зоны $\mathfrak{L}$ из $s \leqslant n^2$ сегментов длин $\ll p^{1-\nu}{}_{v}$; $\vartheta_\nu = \frac{v}{100n}$ и оценки § 12 дадут

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} \ll p^{b_1 - vn}.$$

Учитывая (12), найдем

$$\int\limits_{G_{2\tau q}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{b_1} d\omega \ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

18

Мы имеем таким образом

$$J' \ll \int\limits_{O} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega + \sum \int\limits_{G_{1mq}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega +$$
$$+ \sum \int\limits_{G_{1mo}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{b_1} d\omega + \sum \int\limits_{G_{2\tau q}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega +$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{L}} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{b_1} d\omega.$$

По § 6,

$$\int\limits_{O} \cdots \int |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} d\omega < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Далее, количество областей G_{1mq}, G_{1mq}, $G_{2\tau g}$ будет $\ll (\ln p)^2$, и каждый из интегралов по ним будет $\ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}$. Отсюда имеем

$$J = \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} d\alpha_n \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| =$$
$$= \int\limits_{-\frac{1}{p^{n+\varkappa}}}^{\frac{1}{p^{n+\varkappa}}} d\alpha_n \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1} + R,$$

где $\delta_n = \frac{1}{p^{k\left(1-\frac{r}{n}\right)}} \leqslant \delta'_n$; $|R| < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

Именно при интегрировании по области, где $|\alpha_n| \geqslant \frac{1}{p^{n+\lambda}}$, мы можем взять, вместо пределов $(-\delta_k, \delta_k)$, расширенные пределы $(-\delta'_k, \delta'_k)$, а при интегрировании в области, где $|\alpha_n| < \frac{1}{p^{n+\lambda}}$, вернуться для α_{n-1}, $\alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1$ к старым пределам интеграла J, $(-\delta_{n-1}, \delta_{n-1}), \ldots, (-\delta_1, \delta_1)$. Это вполне допустимо в силу положительности подинтегральной функции.

Теперь займемся интегралом

$$\int\limits_{-\frac{1}{p^{n+\varkappa}}}^{\frac{1}{p^{n+\varkappa}}} d\alpha_n \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{b_1}.$$

Имеем в области интегрирования

$$e^{2\pi i (\alpha_n x_n + \ldots + \alpha_1 x)} = e^{2\pi i (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x)} + O\left(\frac{1}{p^{\varkappa}}\right)$$

(ибо $|x^n| \leqslant p^n$).

Значит, полагая

$$f_1(x) = \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x; \quad S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{x=0}^{p} e^{2\pi i f_1(x)},$$

найдем

$$| S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - S(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) | \ll p^{1-\frac{r}{n}};$$

$$| S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{b_1} \ll p^{b_1 - b_1 \frac{r}{n}} + | S(\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}) |^{b_1}.$$

Далее

$$\int\limits_{-\frac{1}{p^{n+\lambda}}}^{\frac{1}{p^{n+\lambda}}} d\alpha_n \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 p^{b_1 - b_1 \frac{r}{n}} \ll \frac{p^{b_1 - b_1 \frac{r}{n}}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

и так как $b_1 \frac{r}{n} \geqslant C_0 nr \ln r > \frac{r(n+1)}{2}$, то это $\ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}$, и у нас остается только

$$\int\limits_{-\frac{1}{p^{n+\lambda}}}^{\frac{1}{p^{n+\lambda}}} d\alpha_n \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{b_1} \ll \frac{1}{p^{n+\lambda}} J_{n-1},$$

где

$$J_{n-1} = \int\limits_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} d\alpha_{n-1} \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{b_1}.$$

Этот интеграл такого же типа, как интеграл в § 5, роль n здесь играет $n-1$. Далее, так как

$$b_1 \geqslant C_0 n^2 \ln n > C_0 (n-1)^2 \ln (n-1)\,^*;$$

$$\frac{r}{n} = \frac{[n^{\frac{1}{5}}]}{n} < \frac{(n-1)^{\frac{1}{5}}}{n-1} \quad (n \geqslant 2),$$

---

* Как легко видеть из предыдущего, если взять $r+1$, вместо r, то пригодно то же C_0.

то к нему приложим те же рассуждения, которые приведут к выводу

$$J_{n-1} \ll c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} + \frac{1}{p^{n-1+\lambda}} J_{n-2}; \qquad \frac{r}{n} < \frac{(n-2)^{\frac{1}{5}}}{n-2}.$$

Продолжая этот процесс, дойдем до J_r и получим

$$J < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{n(n-1)}} + \frac{c_{18}}{p^{n+\lambda} p^{-1+\lambda} \cdots p^{rn+\lambda}} J_r,$$

$$J_r = \int\limits_{-\delta_r}^{\delta_r} d\alpha_r \ldots \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} d\alpha_1 \, |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{b_1}.$$

Для этого интеграла возьмем тривиальную оценку

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \leqslant p,$$

$$J_r \ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{r(r+1)}{2} - \frac{r^2(r+1)}{2n}}}.$$

Далее,

$$\frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^{n+\lambda} p^{n-1+\lambda} \cdots p^{r+1+\lambda} p^r \cdots p^1} < \frac{p^{\frac{r^2(r+1)}{2n}}}{p^{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2}\frac{r}{n}}}; \qquad \frac{n}{r}\frac{r}{n} > \frac{r^2(r+1)}{2n}.$$

Значит,

$$\frac{c_{18}}{p^{n+\lambda} \cdots p^{r+1+\lambda}} J_2 \ll \frac{p^{b_1}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Отсюда

$$J < c_\varepsilon \frac{p^{b_1+\varepsilon}}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Этим мы доказали основной результат

$$Q < c_\varepsilon p^{b_1 - \frac{r}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon} = c_\varepsilon p^{b_1 - r\frac{n+1}{2} + \varepsilon}.$$

19

Таким образом, мы получаем формулу (2) при $\gamma = \frac{r}{n}$; $r = [n^{\frac{1}{5}}]$,

$$|S| \ll c_\varepsilon P \left[P^{-1} p_1^{\left(1-\frac{r}{n}\right)^k \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon} (1 + p_1^{-n} q \ln q)\right]^{\frac{1}{2bk}} + p_1 \tag{13}$$

для

$$S = \sum_{z=1}^{P} e^{2\pi i F(z)}; \quad F(z) = Az^{n+1} + A_0 z^n + \ldots + A_n;$$

$$A = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad |\theta| \leqslant 1; \quad q > c'P,$$

$$b = 2b_1 = 2[C_0 n^2 \ln n] + 2 < 3C_0 n^2 \ln n.$$

Рассмотрим случай $q > c'P$; $q \leqslant c''P$; $n \geqslant 4$. Подберем k так, чтобы было

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right)^k \frac{n(n+1)}{2} < \frac{1}{4}; \quad \left(1 = \frac{r}{n}\right)^k > 2n(n+1).$$

Так как $\ln\frac{1}{1-\frac{r}{n}} > \frac{r}{2n}$, то достаточно взять $k > \frac{\ln(2n(n+1))}{r}$. Для этой цели подойдет $k=[3n^{\frac{4}{5}}\ln n]$. Считая $p_1 < P$, получим, полагая $\varepsilon=\frac{1}{8}$,

$$S \ll P[P^{-\frac{5}{8}}(1+p_1^{-n}q\ln q)]^{\frac{1}{2bk_0}}+p_1.$$

Полагая $p_1=[P^{1-\frac{11}{30n}}]$ и учитывая, что $q < c''P^n$, находим

$$S \ll P(P^{-\frac{5}{8}}+P^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2bk_0}}+p^{1-\frac{11}{30n}}.$$

Или, окончательно

$$S \ll P^{1-\rho};\ \rho > \frac{1}{108\,C_0 n^{\frac{14}{5}}\ln^2 n}$$

(C_0, согласно предыдущему, можно принять равным $20\cdot 13\cdot 14\cdot 2^{14}$).

Теперь рассмотрим случай, когда $q < c''P^{n+\tau}$, где $0<\tau\leqslant\frac{1}{2}$. Полагая $p_1=[P^{1-\frac{1}{32n}}]$, найдем

$$S \ll P(P^{-\frac{3}{32}})^{\frac{1}{2bk_0}}+P^{1-\frac{1}{32n}}$$

или

$$S \ll P^{1-\rho};\quad \rho > \frac{1}{186C_0 n^{\frac{14}{5}}\ln^2 n}.$$

Подобные же результаты могут быть получены при $\tau\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Пусть $q < P$. Тогда разобьем S на сумму $\ll\frac{P}{q}+1$ слагаемых сумм из P_1 подряд идущих слагаемых, где $P_1 \gg q$. Получим

$$S \ll \frac{P}{q}P_1^{1-\rho} \ll Pq^{-\rho};\quad \rho > \frac{1}{108C_0 n^{\frac{14}{5}}\ln^2 n}.$$

20

Обратимся к асимптотическому закону в проблеме Варинга, точно следуя схеме рассуждений И. М. Виноградова [1]. Полагаем

$$S_1=\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi i\alpha x^n}.$$

Тогда при нашем b и целом k получим, что $|S_1|^{bk}$ не превосходит суммы

$$\left(p_t=p_1^{\left(1-\frac{r}{n}\right)^{t-1}}\right) \ll p_1^{bk}(p_1\ldots k_k)^{-b}$$

слагаемых вида

$$K=\sum e^{2\pi i\alpha(B_0V_n+B_1V_{n-1}+\ldots+B_{n-1}V_1)};\quad B_0\neq 0,$$

причем $V_j \ll p_1^j$ и число решений системы $V_n = z_n;\ V_{n-1} = z_{n-1}, \ldots, V_1 = z_1$ будет

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) < c_\varepsilon p_1^\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^{b - r\frac{n+1}{2}}.$$

Далее, $\int_0^1 |S_1|^{bk} d\alpha$ будет $\ll$ произведения ${}_1^{bk}(p_1 \ldots p_k)^{-b}$ на число решений уравнения $B_0 z_n + B_1 z_{n-1} + \ldots + B_{n-1} z = 0$ и на число $c_\varepsilon p_1^\varepsilon (p_1 \ldots p_k)^{b - r\frac{n+1}{2}}$.

Указанный интеграл, таким образом, будет

$$< c_\varepsilon p_1^{bk} p^{\frac{n(n+1)}{2}} p_1^\varepsilon p_1 \ldots p_k)^{-r\frac{n+1}{2}} (p_1 \ldots p_k)^{r\frac{n+1}{2}} = p_1^{\frac{n(n+1)}{2} - \left(1 - \frac{r}{n}\right)^k \frac{n(n+1)}{2}}.$$

При $k > 30 n^{\frac{4}{5}} \ln n$ будет

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right)^k \frac{n(n+1)}{2} < \frac{1}{n^4}.$$

Поэтому получим тогда

$$\int_0^1 |S_1|^{bk} d\alpha \ll p_1^{bk - n + \frac{1}{n^4}},$$

откуда, используя оценки И. М. Виноградова сумм Вейля (или наши), найдем, что при $r > 2bk > 180 C_0 n^{\frac{14}{5}} \ln^2 n$ верна асимптотическая формула: для числа J_N решений уравнения $x_1^n + \ldots x_r^n = N;\ x_i \geqslant 0$ имеем

$$J_N = \frac{(\Gamma(1+\nu))^2}{\Gamma(1+r\nu)} N^{r\nu - 1} \gamma(N, r) + O(N^{r\nu - 1 - c_1});\ c_1 > 0.$$

Ленинградский гос. университет

Поступило
19 V 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М. Новый метод в аналитической теории чисел, Л.-М., гл. VI и VII, 1937.
[2] Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, Leipzig, S. 352, 1927.

U. LINNIK. NEW ESTIMATIONS OF WEYL'S SUMS BY THE METHOD DUE TO VINOGRADOW

SUMMARY

In this paper I expose a modification in I. M. Vinogradoff's new method of the estimation of Weyl's sums and obtain an improvement on these estimation and on the asymptotic formula in Waring's problem.

Namely it is proved that if

$$S = \sum e^{2\pi i (A_0 z^{n+1} + A_1 z^n + \ldots + A_{n+1})};$$

$A_0 = +;\ |\theta| \leqslant 1,\ (a, q) = 1;\ A_i$ are real numbers,

then

$$|S| \ll P^{1-\frac{1}{cn^{\frac{14}{5}}\ln^2 n}} \quad \text{for } P \leqslant q = P^n;$$

$$|S| \ll Pq^{-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{cn^{\frac{14}{5}}\ln^2 n} \quad \text{for } q < P$$

and other similar results.

It is also proved that for the number J_N of solutions of $x_1^n + \ldots + x_r^n = N$; $x_i \geqslant 0$. The asymptotic formula

$$J_N = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(1+r\nu)} \gamma(N, r) N^{r\nu-1} + O(N^{r\nu-1-c_0});$$

$$\nu = \frac{1}{n}; \quad c_0 > 0 \quad \text{holds for} \quad r \geqslant cn^{\frac{14}{5}} \ln^2 n.$$

In author's work «On Weyl's sums» which is in print in «Matematičeski Sbornik» is attained the evaluation

$$|S| \ll p^{1-\frac{1}{C_0 n^2 \ln n}}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 71—108 Série mathématique

С. П. ПУЛЬКИН

ОБ ИТЕРАЦИЯХ ФУНКЦИИ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Исследуется последовательность, получающаяся в результате применения процесса итерации к данной функции $y = \varphi(x)$. Исследование производится путем изучения «ломаной итерации», являющейся геометрической интерпретацией процесса итерации. Главным образом рассматривается тот случай, когда ломаная итерации заключена в некоторой ограниченной области. Исследованы ломаные итерации с конечным числом предельных точек множества вершин ломаной («точек концентрации»). Рассматривается общий вид ломаной итерации с приводимым множеством вершин.

Пусть однозначная функция вещественного переменного $y = \varphi(x)$ определена для всех значений x. Ломаную итерации строим так: берем на оси абсцисс произвольную точку M_0 с абсциссой x_0, проводим через нее прямую, параллельную OY до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$ в точке M_1. Через M_1 проводим прямую, паралелльную OX до пересечения в точке M_2 с биссектрисой первого координатного угла (в дальнейшем будем называть ее просто биссектрисой). Вообще из точки M_{2n} на биссектрисе проводим прямую, параллельную оси OY до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$ в точке M_{2n+1}, а из точки M_{2n+1} проводим прямую, параллельную OX до пересечения с биссектрисой в точке M_{2n+2}. Очевидно, эта ломаная соответствует итерации функции $y = \varphi(x)$ при начальном значении $x = x_0$. Вершины ломаной итерации, лежащие на кривой, будем называть *нечетными* вершинами, вершины, лежащие на биссектрисе, — *четными* вершинами.

Если некоторая вершина ломаной итерации совпадает с одной из предшествующих вершин, то такую ломаную мы назовем *вырожденной*. Очевидно, вырожденные ломаные итерации содержат только конечное число различных между собою вершин.

Я занимался изучением невырожденных ломаных итерации в предположении, что:

(A)

1) Функция $y = \varphi(x)$ непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода;

2) кривая $y = \varphi(x)$ имеет непрерывно вращающуюся касательную, за исключением, быть может, конечного числа угловых точек и точек возврата;

3) кривая $y = \varphi(x)$ имеет конечное число точек перегиба;

4) функция $y = \varphi(x)$ имеет конечное число максимумов и минимумов.

Я различаю прежде всего следующие случаи: 1) ломаная итерации не умещается ни в какой ограниченной области, 2) ломаная итерации целиком заключается внутри некоторой ограниченной области. В последнем случае множество вершин невырожденной ломаной имеет во всяком случае предельные точки, которые я называю точками концентрации ломаной. Точку, в любой окрестности которой содержатся как четные, так и нечетные вершины ломаной, будем называть точкой концентрации первого рода, а всякую иную точку концентрации — точкой концентрации второго рода.

Будем называть последовательность $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots M_{i_k}, \ldots$ вершин ломаной, лежащих на биссектрисе или на данном непрерывном отрезке кривой, *монотонной*, если последовательность абсцисс этих точек $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_k}, \ldots$ монотонна.

Будем говорить, что ломаная *монотонно* приближается к точке P или к какому-нибудь другому геометрическому образу P, если для любой окрестности этого образа можно указать такую вершину, начиная с которой вся ломаная лежит внутри этой окрестности.

1. Ломаные итерации, не умещающиеся ни в какой ограниченной области

Будем называть главным квадратом квадрат R, стороны которого параллельны осям координат и две противоположные вершины лежат на биссектрисе, и такой, что 1) внутри этого квадрата заключены все точки разрыва, угловые точки, точки возврата, точки перегиба, точки экстремума кривой; 2) вне квадрата кривая не имеет общих точек ни с биссектрисой, ни с прямой, перпендикулярной биссектрисе и проходящей через центр квадрата; 3) кривая пересекает стороны квадрата во внутренних точках.

Очевидно, что для всякой кривой, удовлетворяющей условиям (А), существует бесчисленное множество главных квадратов, если только кривая не имеет бесконечной ветви в виде прямой, совпадающей с биссектрисой. Это последнее не ограничивает общности дальнейших рассуждений, так как в случае, когда вершина ломаной итерации окажется на такой ветви кривой, ломаная будет вырожденной.

Прямую, перпендикулярную биссектрисе и проходящую через центр главного квадрата, будем называть продолжением второй диагонали главного квадрата.

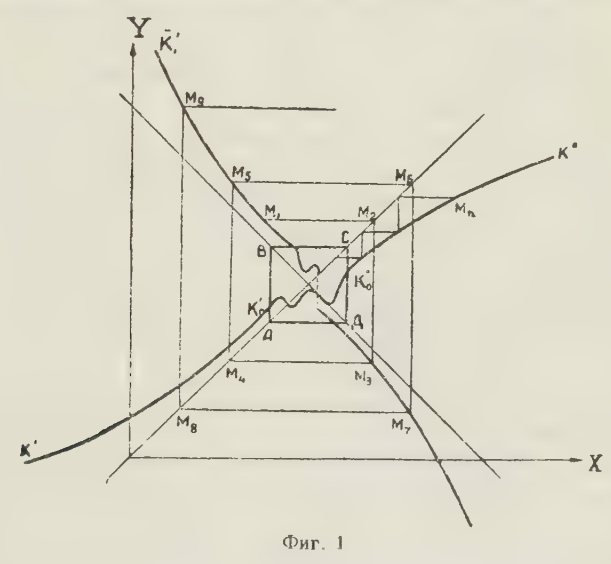
Кривая вне главного квадрата состоит из двух ветвей K' (левая ветвь) и K'' (правая ветвь); каждая из этих ветвей непрерывна, монотонна, имеет непрерывно вращающуюся касательную и неизменное направление вогнутости (или представляет собою полупрямую) и целиком содержится внутри одного из углов, образуемых биссектрисой и продолжением второй диагонали главного квадрата. Ветви K' и K'' пересекают стороны главного квадрата соответственно в точках K'_0 и K''_0, не совпадающих с вершинами главного квадрата.

Части биссектрисы, находящиеся вне главного квадрата, будем называть левой и правой ветвями биссектрисы.

Исследуем вид ломаной итерации в случае, когда она не умещается ни в какой ограниченной области.

Построим для данной кривой какой-нибудь главный квадрат R. Так как мы предположили, что ломаная итерации не умещается ни в какой ограниченной области, то вне R на кривой лежит некоторая вершина ломаной M_n. Рассмотрим различные случаи, которые могут представиться.

I. Кривая пересекает обе вертикальные стороны главного квадрата R. Заметим, что если в этом случае внутри R будет хоть одна вершина



Фиг. 1

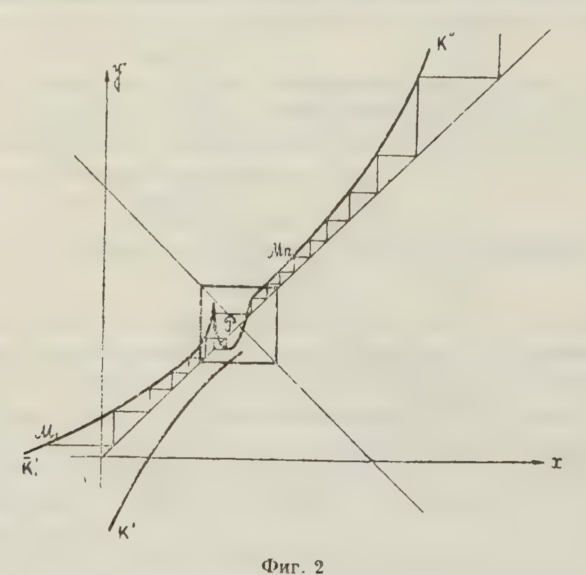
ломаной, то при дальнейшем построении ломаная не может выйти из R, и, следовательно, будет заключаться в ограниченной области. Так как мы допустили, что ломаная не умещается ни в какой ограниченной области, то внутри R не может быть ни одной вершины ломаной.

Пусть правая ветвь K'' восходящая, и M_n лежит на этой ветви (фиг. 1). Так как K'' ниже биссектрисы, и расстояния точек дуги $K_0''M_n$ от биссектрисы больше положительного числа, то ломаная, начиная от M_n, будет приближаться к R и через конечное число звеньев будет внутри R, что невозможно. Так же докажем, что вершина ломаной не может лежать на левой ветви, если последняя восходящая.

Если правая ветвь нисходящая и при этом левая восходящая, то на правой ветви опять же не может быть ни одной вершины ломаной. В самом деле, пусть M_n лежит на правой ветви. Если M_n не ниже нижней горизонтальной стороны R, то уже M_{n+1} будет внутри или на границе R, что невозможно; если же M_n ниже нижней горизонтальной стороны R, то M_{n+2} будет на левой, восходящей ветви кривой,

что, по доказанному, невозможно. Так же докажем, что невозможен случай, когда левая ветвь — нисходящая, а правая — восходящая.

Пусть теперь обе ветви нисходящие, и M_n лежит на левой ветви. M_n должна быть выше верхней горизонтальной стороны R, так как иначе уже M_{n+1} будет внутри или на границе R. Но если так, т. е. M_n выше верхней горизонтальной стороны R, то M_{n+1} лежит на правой ветви биссектрисы, M_{n+2} — на правой ветви кривой, ниже нижней стороны R; M_{n+3} — на левой ветви биссектрисы, M_{n+4} — на левой ветви кривой. Так как левая ветвь ниже, а правая выше продолжения второй диагонали, то M_{n+4} будет на левой ветви ближе к главному квадрату, нежели M_n, в чем легко убедиться путем сравнения координат вершин



Фиг. 2

M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, M_{n+3}, M_{n+4}. Продолжая далее построение, мы будем иметь ломаную в виде сжимающейся спирали, приближающейся к R. Но тогда вся ломаная заключена внутри ограниченной области.

Итак, если кривая пересекает только вертикальные стороны главного квадрата, то ломаная итерации заключается внутри ограниченной области.

II. Кривая пересекает только горизонтальные стороны главного квадрата (или обе, или одну из них). Пусть одна из ветвей кривой, например правая, восходящая, и на ней лежит вершина M_n (фиг. 2, ветвь K''). Так как эта ветвь кривой, кроме того, выше биссектрисы, а уже вершина M_{n+1} будет правее R, то ломаная будет удаляющейся от R. Так как к тому же для любого конечного отрезка ветви K'' расстояния его точек от биссектрисы больше некоторого положительного числа, то построение можно произвести сколь угодно далеко. Таким образом, ломаная будет иметь вид неограниченно удаляющейся

лестницеобразной ветви. Тот же результат получим, если левая ветвь — восходящая и на ней лежит вершина M_n.

Пусть теперь одна из ветвей, например левая, нисходящая, другая — восходящая, и вершина M_n лежит на нисходящей ветви. Тогда обе ветви пересекают верхнюю горизонтальную сторону главного квадрата. Вершина M_n лежит выше главного квадрата, следовательно, M_{n+1} правее его, а M_{n+2} — на правой, восходящей ветви. Мы пришли к уже рассмотренному случаю. К тому же придем, если левая ветвь будет восходящая, правая — нисходящая.

Пусть, наконец, обе ветви нисходящие (фиг. 1, ветви K' и K''). Вершина M_n пусть лежит, например, на левой ветви. M_{n+1} будет на правой ветви биссектрисы, M_{n+2} — на правой ветви кривой, M_{n+3} — на левой ветви биссектрисы, M_{n+4} — на левой ветви кривой. Так как левая ветвь кривой выше, а правая — ниже второй биссектрисы, то M_{n+4} будет на кривой далее от главного квадрата, нежели M_n.

Таким образом, при дальнейшем построении мы получим ломаную в виде расширяющейся спирали. Покажем, что это будет неограниченно расширяющаяся спираль. Рассмотрим последовательность вершин M_n, $M_{n+4}, \ldots, M_{n+4k}, \ldots$ на левой ветви кривой. Эта последовательность монотонна, и если она ограничена, то сходится к некоторой точке кривой P_1. Но тогда, как нетрудно убедиться, последовательности вершин на другой ветви кривой и на ветвях биссектрисы также сходятся к точкам P_3, P_4, P_2, причем точки P_1, P_2, P_3, P_4 суть вершины квадрата, стороны которого параллельны осям координат. Из этих вершин вершины P_2, P_4 лежат на биссектрисе. Значит, точки P_1 и P_3 суть точки кривой, симметричные относительно биссектрисы. Но это, очевидно, невозможно ввиду нашего предположения о расположении ветвей кривой относительно биссектрисы и продолжения второй диагонали.

Заметив, что если вне главного квадрата в рассматриваемом случае имеется вершина ломаной на биссектрисе, то следующая вершина будет на кривой, можно высказать следующее:

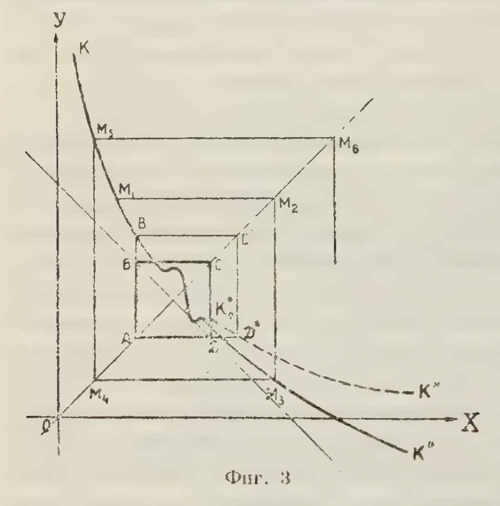
Если кривая пересекает лишь горизонтальные стороны главного квадрата и если имеется хотя бы одна вершина ломаной итерации вне главного квадрата, то ломаная, начиная от некоторой вершины, имеет вид или неограниченно удаляющейся лестницы, или неограниченно расширяющейся спирали.

III. Кривая пересекает одну вертикальную и одну горизонтальную сторону главного квадрата, расположенные по одну сторону от биссектрисы. Например, пусть кривая пересекает левую вертикальную и верхнюю горизонтальную (фиг. 2, ветви $\overline{K}'$ и K'') стороны. Правая ветвь K'' будет при этом восходящей. Если вершина M_n лежит на K'', то мы имеем уже рассмотренный случай: ломаная имеет вид неограниченно удаляющейся лестницы. Если M_n лежит на левой ветви, то или уже вершина M_{n+2} будет на правой ветви (если M_n выше верхней горизонтальной стороны), или ломаная через конечное число звеньев окажется

внутри главного квадрата. Но так как мы предположили, что ломаная не умещается ни в какой ограниченной области, то она должна выйти за пределы главного квадрата, что можно сделать только через верхнюю горизонтальную сторону, причем вершина ломаной окажется на правой ветви.

В случае, если кривая пересекает нижнюю горизонтальную и правую вертикальную стороны главного квадрата, рассуждения аналогичны.

Итак, если кривая вне главного квадрата расположена по одну сторону от биссектрисы (сюда относится и ранее рассмотренный случай, когда кривая пересекает только одну сторону главного квадрата) и ломаная итерации не умещается ни в какой ограниченной области, то эта ломаная, начиная с некоторой вершины, имеет вид неограниченно удаляющейся лестницы.



Фиг. 3

IV. Кривая пересекает стороны главного квадрата, симметричные относительно биссектрисы. Пусть, например, кривая пересекает верхнюю горизонтальную и правую вертикальную стороны главного квадрата. Тогда левая ветвь будет, очевидно, нисходящей. Невозможно, чтобы на сколь угодно большом расстоянии от биссектрисы на ветвях K' и K'' были пары точек, симметричные относительно биссектрисы. Ибо если будет так, то можно выбрать такую пару точек S' и S'' этого рода, чтобы квадрат R' с диагональю S' S'' содержал внутри себя главный квадрат R и вершину ломаной M_1. Но так как вне R' ветви кривой восходящие и кривая проходит через вершины R', то ломаная, имеющая хоть одну вершину внутри R', будет вся заключена внутри R', что невозможно. Значит, можно построить главный квадрат $ABCD$ (фиг. 3) столь больших размеров, что вне $ABCD$ нет ни одной пары точек кривой, симметричных относительно биссектрисы.

Построим кривую K^*, симметричную K' относительно биссектрисы. Кривая K^* будет пересекать правую вертикальную сторону главного квадрата во внутренней точке K^*_0, будет нисходящей, не будет иметь общих точек ни с биссектрисой, ни с продолжением второй диагонали, ни с ветвью K''. Ветвь K'' будет целиком заключаться или между K^* и биссектрисой, или между K^* и продолжением второй диагонали. Продолжим левую и нижнюю стороны AB и AD главного квадрата $ABCD$ до пересечения с ветвями K' и K'' в точках B' и D^*, которые будут симметричными относительно биссектрисы, и построим квадрат

$AB'C'D^*$. Ветвь K' будет проходить через вершину B' этого квадрата, а ветвь K'' пересечет или нижнюю или правую сторону его, притом во внутренней точке. Так как вне квадрата $AB'C'D^*$ имеются вершины ломаной, то имеется вершина ломаной M_n на ветви K'' вне $AB'C'D^*$. Если K'' восходящая, то, рассуждая так, как в случае 1, убедимся, что ломаная через конечное число звеньев попадет внутрь квадрата $AB'C'D^*$ и потом не выйдет из него, т. е. ломаная итерации будет заключена в ограниченной области. Если K'' нисходящая, но выше кривой K^*, то или уже вершина M_{n+1} будет внутри или на границе квадрата $AB'C'D^*$, или ломаная образует сжимающуюся спираль, следовательно, во всяком случае будет заключаться внутри ограниченной области. Наконец, если K'' пересекает нижнюю сторону AD^* квадрата $AB'C'D^*$, т. е. K'' лежит ниже K^*, то ломаная образует расширяющуюся спираль, притом расширяющуюся неограниченно, так как на ветвях кривой K' и K'' нет точек, симметричных относительно биссектрисы. Аналогичные результаты получим в случае, если кривая пересекает левую вертикальную и нижнюю горизонтальную стороны главного квадрата.

Итак, если кривая пересекает стороны главного квадрата, симметричные относительно биссектрисы, и ломаная итерации не умещается ни в какой ограниченной области, то эта ломаная, начиная с некоторой вершины, имеет вид неограниченно расширяющейся спирали.

Результаты, полученные в настоящем параграфе, можно сформулировать в виде следующего предложения:

ТЕОРЕМА 1. *Если ломаная итерации не умещается ни в какой ограниченной области, то, начиная от некоторой вершины, она имеет вид или неограниченно удаляющейся лестницы, или неограниченно расширяющейся спирали.*

Следствие. *Если ломаная итерации имеет точку концентрации, то она заключается в некоторой ограниченной области.*

2. Ломаные итерации, имеющие точки концентрации первого рода

Будем рассматривать теперь ломаные итерации, целиком заключающиеся в ограниченной области. Всякая такая ломаная имеет по крайней мере одну точку концентрации.

Пусть ломаная итерации имеет точку концентрации P первого рода. Так как в любой окрестности точки P имеются как четные, так и нечетные вершины ломаной, то 1) P лежит на биссектрисе; 2) если P принадлежит кривой, то она есть или точка непрерывности, или конец одной из ветвей кривой в месте разрыва; 3) если точка P не принадлежит кривой, то она есть предельная для ветви кривой в месте разрыва.

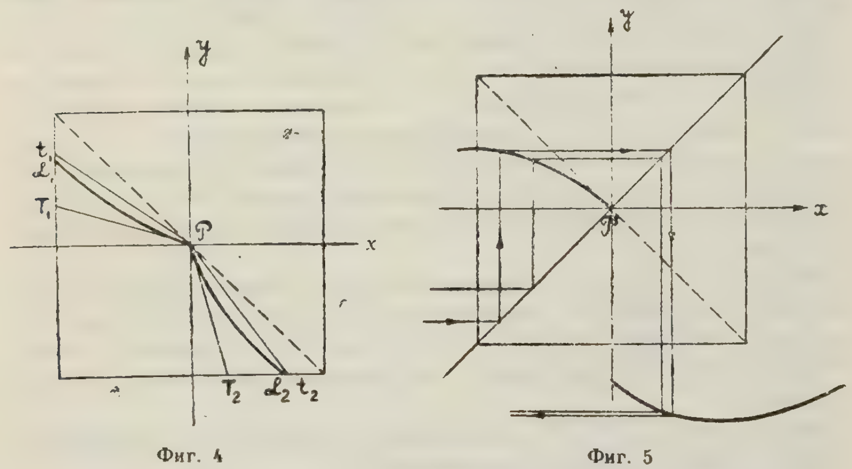
Пусть P есть какая-нибудь точка непрерывности кривой, лежащая на биссектрисе. Кривая в точке P имеет левую и правую касательные PT_1 и PT_2 (фиг. 4) с угловыми коэффициентами k_1 и k_2. Существует

квадрат с центром в точке P и диагональю, совпадающей с биссектрисой, удовлетворяющий следующим условиям (фиг. 4):

1. Внутри квадрата кривая непрерывна.

2. Внутри квадрата каждая из двух дуг PL_1 и PL_2, на которые делит кривую точка P, монотонна, имеет непрерывно вращающуюся касательную и неизменное направление вогнутости (или представляет отрезок прямой).

3. Каждая из двух касательных PT_1 и PT_2 пересекает ту же сторону квадрата, которую пересекает соответствующая ветвь кривой



Фиг. 4 Фиг. 5

(если касательная совпадает с диагональю квадрата, то будем причислять конец диагонали к той стороне квадрата, которую пересекает соответствующая ветвь кривой).

Область, ограниченную этим квадратом, назовем главной окрестностью точки P.

Если P есть конец одной из ветвей кривой в месте разрыва, то главную окрестность этой точки построим в виде квадрата с центром в точке P, удовлетворяющего следующим условиям (фиг. 5):

1. Внутри квадрата содержатся только точки той ветви кривой, которая оканчивается в P.

2. Внутри квадрата кривая монотонна, имеет непрерывно вращающуюся касательную и неизменное направление вогнутости (или представляет собой отрезок прямой).

3. Касательная к этой ветви в точке P пересекает ту же сторону квадрата, что и кривая.

При этом точка P может принадлежать, а может и не принадлежать кривой.

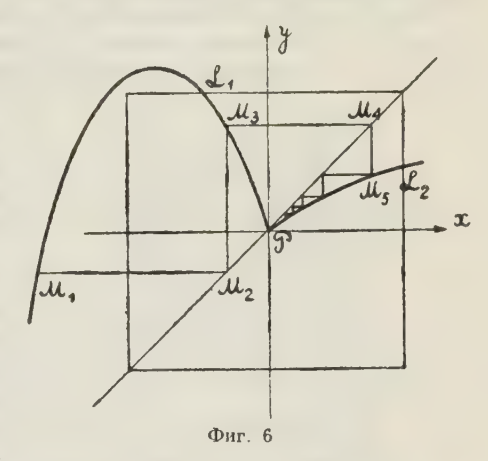
Очевидно, существует бесчисленное множество главных окрестностей данной точки P.

Не нарушая общности, можно предполагать, что точка P совпадает с началом координат, что и будем делать в настоящем параграфе. Будем

говорить, что кривая лежит между биссектрисой и осью X (осью Y), если она лежит внутри острого угла между биссектрисой и этой осью.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть одна из ветвей кривой внутри главной окрестности точки P лежит между биссектрисой и осью X. Если на этой ветви имеется вершина ломаной M_n, то точка P есть точка концентрации ломаной, притом единственная (типа «лестница»).*

В самом деле, пусть, например, правая ветвь кривой PL_2 лежит между биссектрисой и осью X, и на этой ветви имеется вершина ломаной M_n. При последующем построении ломаная будет монотонно приближаться к точке P, и P будет являться поэтому единственной точкой концентрации ломаной (фиг. 6).



Фиг. 6

Точкой выметания будем называть точку концентрации первого рода, к которой ломаная итерации приближается немонотонно.

Начальным множеством, принадлежащим данной главной окрестности Δ точки выметания P, будем называть множество, состоящее из следующих точек: 1) вершин M_ν ломаной, содержащихся внутри Δ таких, что вершины $M_{\nu-1}$ находятся вне Δ; 2) вершины M_1, если она находится внутри Δ.

Все точки начального множества, кроме точки M_1, суть четные вершины ломаной. В самом деле, если M_{2k+1} $(k > 0)$ есть нечетная вершина, содержащаяся внутри главной окрестности, то предшествующую ей вершину M_{2k} мы получим, если проведем через M_{2k+1} прямую, параллельную оси Y до пересечения с биссектрисой. Но прямая, проходящая через точку внутри квадрата и параллельная его стороне, пересекает диагональ квадрата во внутренней точке; следовательно, если нечетная вершина лежит внутри главной окрестности, то и предшествующая ей вершина также лежит внутри главной окрестности.

Очевидно, всякая главная окрестность Δ точки выметания содержит бесконечное, принадлежащее этой окрестности, начальное множество. Отсюда следует, что если ломаная итерации имеет точку выметания P, то она имеет еще точки концентрации, отличные от P.

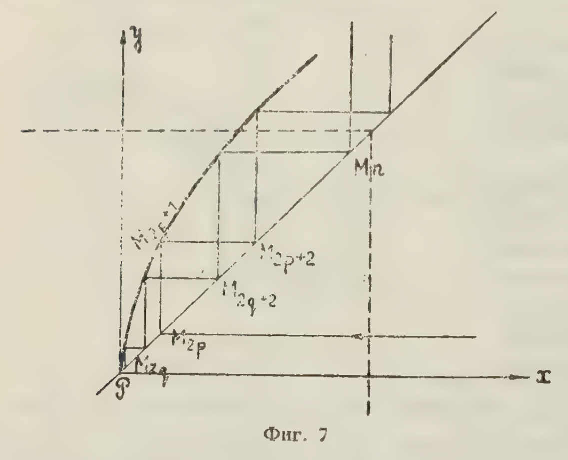
ТЕОРЕМА 3. *Если в главной окрестности точки концентрации P существует ветвь кривой, проходящая между биссектрисой и осью Y и нет ветви кривой, проходящей между биссектрисой и осью X, с вершинами ломаной, то P есть точка выметания.*

Пусть некоторая ветвь кривой внутри главной окрестности точки концентрации P проходит между биссектрисой и осью Y. Если на этой

ветви имеется вершина ломаной M_n, то при дальнейшем построении ломаная через конечное число звеньев выйдет за пределы главной окрестности (фиг. 7). При соблюдении условий теоремы возможны следующие случаи:

1. P — точка разрыва. Тогда главная окрестность Δ содержит всего одну ветвь, именно ту, которая обладает описанным свойством. Но тогда ломаная не может приближаться к P монотонно; значит, P есть точка выметания.

2. P — точка непрерывности, одна из ветвей, обозначим ее Γ_1, находится между биссектрисой и осью Y, другая, Γ_2, — между биссектрисой и осью X. По условию теоремы, Γ_2 не содержит ни одной вершины ломаной; следовательно, все нечетные вершины, содержащиеся внутри Δ, находятся на ветви Γ_1. Поэтому ломаная не может приближаться к P монотонно. P есть точка выметания.



Фиг. 7

3. Одна из ветвей находится между биссектрисой и осью Y, другая — во второй или четвертой четверти. Например, пусть ветвь PL_2 находится между биссектрисой и осью Y, ветвь PL_1 — во второй четверти. Возьмем произвольную нечетную вершину ломаной M_n внутри Δ. Если она находится на ветви PL_2, то по свойству этой ветви при дальнейшем построении ломаная через конечное число шагов выйдет за пределы Δ. Если M_n находится на ветви PL_1, то следующая вершина M_{n+1} будет находиться на биссектрисе внутри Δ, а вершина M_{n+2} будет или вне Δ или на ветви PL_2. Значит, во всяком случае через конечное число шагов ломаная выйдет за пределы Δ. Следовательно, если только точка P есть точка концентрации, то она есть точка выметания.

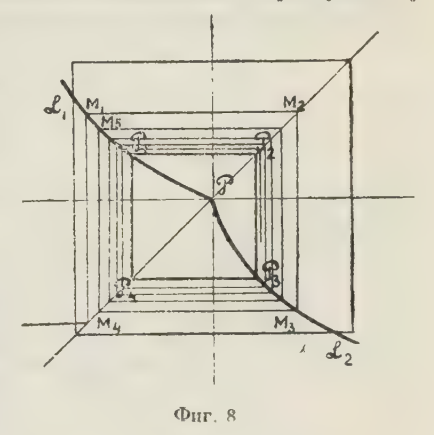
4. Обе ветви PL_1 и PL_2 находятся между биссектрисой и осью Y; очевидно, точка P удовлетворяет определению точки выметания.

Теоремами 2 и 3 исчерпываются случаи, когда кривая имеет хотя бы одну ветвь, проходящую в первой или третьей четверти. В самом деле, если одна из ветвей кривой есть отрезок оси абсцисс или отрезок биссектрисы, то ломаная, попавшая на такую ветвь, будет вырожденной. Все прочие случаи предусмотрены теоремами 2 и 3.

Теперь рассмотрим, каковы формы поведения ломаной итерации, если кривая проходит во второй и четвертой четвертях.

Возьмем произвольную точку кривой M_1 внутри главной окрестности, например, на левой ветви PL_1 (фиг. 8).

Если начать построение ломаной от этой точки, то будем иметь следующее. Вершина ломаной M_2 будет на биссектрисе в первой четверти, вершина M_3 — на кривой в четвертой четверти. Может оказаться, что M_3 будет вне главной окрестности. Мы скажем в этом случае, что ломаная вышла за пределы главной окрестности. Если этого нет, то вершина M_3 будет на правой ветви кривой PL_2 внутри главной окрестности. Вершина M_4 будет на биссектрисе в третьей четверти, вершина M_5 — или вне главной окрестности, или на левой ветви PL_1. Пусть M_5 будет на дуге PL_1. Вид ломаной при дальнейшем ее построении определяется следующими соображениями.



Фиг. 8

1. Если на кривой имеется точка M', симметричная точке M_1 относительно биссектрисы, то M_5 совпадает с M_1, ломаная вырождается в квадрат $M_1M_2M_3M_4M_5$.

2. Если вершина M_5 ближе к P, чем M_1, то вследствие монотонности кривой внутри главной окрестности ломаная будет иметь вид бесконечной сжимающейся спирали и не может выйти за пределы главной окрестности (фиг. 8).

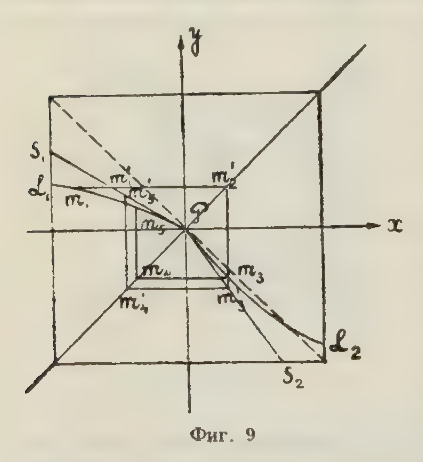
3. Если M_5 дальше от P, чем M_1, то ломаная будет иметь вид расширяющейся спирали, которая или будет вся содержаться внутри главной окрестности и тогда во всяком случае будет бесконечной, или через конечное число звеньев выйдет за пределы главной окрестности.

Легко видеть, что сжимающаяся спираль должна приближаться к некоторому квадрату, стороны которого параллельны осям координат, две противоположные вершины находятся на биссектрисе, две остальные вершины — на кривой, и к вершинам которого монотонно сходятся последовательности вершин ломаной, расположенные на ветвях кривой и на биссектрисе (фиг. 8). Вершины этого квадрата, который будем называть «предельным квадратом», являются точками концентрации; предельный квадрат может выродиться в точку — это будет точка P, которая будет единственной точкой концентрации ломаной, притом первого рода. Очевидно, необходимым и достаточным условием того, чтобы сжимающаяся спираль сходилась к точке, является отсутствие на кривой между P и M_1 точек, для которых на другой ветви кривой имеются точки, симметричные относительно биссектрисы. Расширяющаяся спираль, не выходящая за пределы главной окрестности, также будет монотонно сходиться к предельному квадрату, который будет или находиться внутри главной окрестности, или, полностью или частично, совпадать с ее границей.

Назовем *мажорантной кривой первого (второго) рода* кривую, проходящую через точку P во второй и четвертой четвертях внутри главной окрестности Δ, монотонную и непрерывную, причем во второй четверти она ниже (выше), а в четвертой четверти выше (ниже) данной кривой.

Дугу какой-нибудь кривой назовем *дугой сжимающихся спиралей*, если ломаная, начатая построением в произвольной точке этой дуги, будет являться сжимающейся спиралью, все нечетные вершины которой лежат на этой дуге.

Дугу какой-нибудь кривой назовем *дугой расширяющихся спиралей*, если ломаная, начатая построением в произвольной точке этой дуги, является расширяющейся спиралью, пока не выйдет за пределы этой дуги.



Фиг. 9

Например, построим кривую, определяемую уравнениями:

$$y = k_1 x \quad \text{для } x < 0,$$
$$y = k_2 x \quad \text{для } x > 0,$$

причем $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Рассмотрим дугу этой кривой, заключенную внутри главной окрестности точки P. Легко видеть, как показывает простой подсчет координат вершин ломаной, что если $k_1 k_2 < 1$, то эта дуга есть дуга сжимающихся спиралей; если $k_1 k_2 > 1$, то это будет дуга расширяющихся спиралей.

ЛЕММА I. *Пусть кривая проходит во второй и четвертой четвертях. Если она имеет мажоранту первого (второго) рода, являющуюся дугой сжимающихся (расширяющихся) спиралей, то ее отрезок внутри главной окрестности есть также дуга сжимающихся (расширяющихся) спиралей.*

Для доказательства первой части леммы рассмотрим на левой ветви PL_1 нашей кривой произвольную точку $\mathfrak{M}_1$ с абсциссой ξ_1 (фиг. 9). На мажорантной кривой возьмем точку $\mathfrak{M}_1'$ с той же ординатой, как у точки $\mathfrak{M}_1$; абсциссу точки $\mathfrak{M}_1'$ обозначим ξ_1'. Очевидно, такая точка на левой ветви мажоранты существует, и $|\xi_1'| < |\xi_1|$. Начнем от точки $\mathfrak{M}_1'$ построение ломаной итерации для мажоранты. После четырех шагов получим первый завиток сжимающейся спирали $\mathfrak{M}_1' \mathfrak{M}_2' \mathfrak{M}_3' \mathfrak{M}_4' \mathfrak{M}_5'$. Точка $\mathfrak{M}_5'$ с абсциссой ξ_5' будет на левой ветви ближе к P, чем $\mathfrak{M}_1'$, т. е. $|\xi_5'| < |\xi_1'|$. Перейдем теперь к построению ломаной итерации для данной кривой, начиная от $\mathfrak{M}_1$. Легко убедиться, что после четырех шагов получим также завиток спирали $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{M}_5$, целиком содержащийся внутри главной окрестности. При этом $\mathfrak{M}_5$ будет на левой ветви кривой и для ее абсциссы ξ_5 будем иметь $|\xi_5| < |\xi_5'|$. Значит, сопоставляя все неравенства, будем иметь $|\xi_5| < |\xi_1|$, т. е. $\mathfrak{M}_5$ ближе к P, чем $\mathfrak{M}_1$.

Так как точка $\mathfrak{M}_1$ была взята произвольно на левой ветви кривой, и с таким же успехом можно провести рассуждения для правой ветви, то ломаная итерации, начатая построением в любой точке кривой внутри главной окрестности, есть сжимающаяся спираль, не выходящая за пределы главной окрестности.

Вторая часть леммы доказывается аналогично, только, взяв точку $\mathfrak{M}_1$ на кривой, мы должны взять на мажоранте точку $\mathfrak{M}_1''$, имеющую ту же абсциссу, что и точка $\mathfrak{M}_1$.

ЛЕММА II. *Пусть кривая проходит во второй и четвертой четвертях. Если существует мажоранта первого (второго) рода, симметричная относительно биссектрисы, то кривая внутри главной окрестности есть дуга сжимающихся (расширяющихся) спиралей.*

Для доказательства первой части леммы возьмем на кривой внутри главной окрестности произвольную точку $\mathfrak{M}_1$, на мажоранте — точку $\mathfrak{M}_1'$ с той же ординатой, как у точки $\mathfrak{M}_1$. Будем строить ломаную итерации для мажоранты, начиная от точки $\mathfrak{M}_1'$. После четырех шагов мы придем опять в точку $\mathfrak{M}_1'$, ломаная замкнется, образуя квадрат. Легко видеть, что ломаная итерации, построенная для данной кривой, начиная от точки $\mathfrak{M}_1$, через три шага будет внутри этого квадрата, а через четыре шага мы придем в точку $\mathfrak{M}_5$ на той же ветви кривой, что и точка $\mathfrak{M}_1$, причем $\mathfrak{M}_5$ ближе к P, чем $\mathfrak{M}_1$. Так как точка $\mathfrak{M}_1$ была взята произвольно на кривой, то, значит, кривая внутри главной окрестности есть дуга сжимающихся спиралей.

Вторая часть леммы доказывается аналогично.

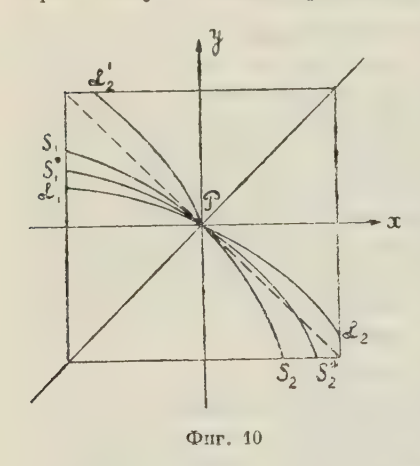
ТЕОРЕМА 4. *Если P есть предельная точка множества пар точек кривой, симметричных относительно биссектрисы, то она не может быть точкой концентрации.*

Допустим противное. Пусть P есть точка концентрации. Заметим, что каждая пара точек кривой, симметричных относительно биссектрисы, определяет некоторый квадрат ρ со сторонами, параллельными осям координат, имеющий эти точки своими вершинами. Кривая проходит через вершины всякого такого квадрата, не лежащие на биссектрисе. Рассмотрим какой-нибудь из этих квадратов ρ', заключенный в столь малой окрестности точки P, в которой кривая монотонна. Возьмем некоторую вершину M_n внутри квадрата ρ', лежащую на кривой. Между M_n и P имеется вершина еще одного квадрата ρ'' такого же типа. Вследствие монотонности ветвей кривой между квадратами ρ' и ρ'', все вершины ломаной с индексами большими n будут находиться между этими квадратами. Следовательно, внутри квадрата ρ'' не будет вершин ломаной; но точка P находится внутри ρ'', поэтому существует окрестность точки P, не содержащая вершин ломаной. Мы пришли к противоречию. Значит, P не может быть точкой концентрации.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть кривая проходит во второй и четвертой четвертях. Для того чтобы точка P была единственной точкой концентрации, необходимо и при условии попадания ломаной в некоторую определенную*

окрестность точки P достаточно, чтобы кривая имела мажоранту первого рода, симметричную относительно биссектрисы.

Необходимость условия. Пусть P является единственной точкой концентрации ломаной. Значит, P не есть предельная точка множества пар точек кривой, симметричных относительно биссектрисы. Поэтому существует главная окрестность Δ точки P такая, что как внутри ее, так и на границе нет точек кривой, симметричных относительно биссектрисы. Построим во второй четверти кривую PL_2', симметричную ветви кривой PL_2 относительно биссектрисы (фиг. 10). Кривая PL_2' не имеет общих точек с ветвью данной кривой PL_1, так как PL_1 и PL_2 не имеют точек, симметричных относительно биссектрисы. Стало-быть, через точку P можно провести кривую PS_1, монотонную, лежащую между кривыми PL_1 и PL_2' и не имеющую общих точек ни с той, ни с другой. Построим теперь во второй четверти дугу PS_2, симметричную дуге PS_1 относительно биссектрисы. Кривая S_1PS_2 будет, очевидно, мажорантой данной кривой или первого или второго рода, симметричной относительно биссектрисы. Докажем, что S_1PS_2 не может быть мажорантой второго рода. Допустим обратное — что S_1PS_2 есть мажоранта второго рода. Значит, на основании леммы II, кривая L_1PL_2 есть дуга расширяющихся спиралей; но тогда всякая ломаная, начатая построением в точке кривой L_1PL_2, должна через конечное число шагов выйти из главной окрестности, иначе она сходилась бы к предельному квадрату, вершины которого, лежащие на кривой внутри Δ, симметричны относительно биссектрисы, что противоречит построению Δ. Если так, то, коль скоро P есть точка концентрации, она есть точка выметания. Значит, P не есть единственная точка концентрации, вопреки предложению. Итак, S_1PS_2 не может быть мажорантой второго рода. Следовательно, эта линия есть мажоранта первого рода.



Фиг. 10

Достаточность условия. Пусть кривая имеет для некоторой главной окрестности Δ точки P мажоранту первого рода, симметричную относительно биссектрисы. Тогда внутри Δ на кривой нет точек, симметричных относительно биссектрисы. С другой стороны, в силу леммы II, кривая внутри малого квадрата есть дуга сжимающихся спиралей. Значит, если ломаная попадает на ветвь кривой внутри Δ, она будет сжимающейся спиралью. Такая спираль должна сходиться или к точке P, или к некоторому предельному квадрату, содержащемуся внутри малого квадрата. Последнее невозможно, так как вершины предельного квадрата, лежащие на кривой, должны быть симметричны относительно

биссектрисы. Следовательно, спираль будет монотонно сходиться к P, которая и явится единственной точкой концентрации ломаной.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть кривая проходит во второй и четвертой четвертях. Для того чтобы точка P была единственной точкой концентрации ломаной, необходимо и при условии попадания ломаной в некоторую определенную окрестность точки P достаточно, чтобы кривая имела мажоранту первого рода, являющуюся дугой сжимающихся спиралей.*

Необходимость условия. Пусть P единственная точка концентрации. Тогда, на основании теоремы 5, она имеет мажоранту первого рода S_1PS_2, симметричную относительно биссектрисы. Между данной кривой L_1PL_2 и кривой S_1PS_2 проведем произвольную монотонную непрерывную кривую $S_1^*PS_2^*$ (фиг. 10). Нетрудно убедиться, что она будет мажорантой первого рода, являющейся дугой сжимающихся спиралей.

Достаточность условия. Пусть кривая проходит во второй и четвертой четвертях и имеет для некоторой главной окрестности Δ мажоранту первого рода $S_1^*PS_2^*$, являющуюся дугой сжимающихся спиралей. Тогда, на основании леммы I, данная кривая L_1PL_2 внутри малого квадрата также является дугой сжимающихся спиралей. Значит, если ломаная попадет внутрь этого малого квадрата, она станет сжимающейся спиралью и должна сходиться или к точке P, или к некоторому предельному квадрату, содержащемуся внутри малого квадрата. Пусть имеет место второе. Рассмотрим одну из вершин P_1 предельного квадрата, находящуюся на кривой. Ломаная, начатая построением в точке P_1, через четыре шага вернется в ту же точку и таким образом замкнется. Это противоречит тому, что кривая L_1PL_2 есть дуга сжимающихся спиралей. Значит, сходимость ломаной к предельному квадрату невозможна. Ломаная спираль будет сходиться к точке P, которая и будет единственной точкой концентрации.

Аналогично доказывается.

ТЕОРЕМА 7. *Если кривая проходит во второй и четвертой четвертях и для некоторой главной окрестности имеет мажоранту второго рода, являющуюся дугой расширяющихся спиралей, то точка P не может быть единственной точкой концентрации (если P есть точка концентрации, то она—точка выметания).*

Рассмотрим важный достаточный признак, позволяющий судить о характере точки.

ТЕОРЕМА 8. *Если кривая проходит во второй и четвертой четвертях, и $k_1k_2 < 1$, то ломаная, попавшая в достаточно малую окрестность точки P, образует спираль, монотонно сходящуюся к P. Если $k_1 k_2 > 1$, то P не может быть единственной точкой концентрации (коль скоро P будет при $k_1k_2 > 1$ точкой концентрации, она будет точкой выметания).*

Построим касательные PT_1 и PT_2 к левой и правой ветвям кривой в точке P. Построим еще объемлющие лучи, Pt_1 и Pt_2, проходящие соответственно во второй и четвертой четвертях такие, что каждая из ветвей кривой внутри главной окрестности находится между касательной PT_i и соответственным лучом Pt_i $(i=1,2)$ (фиг. 4).

Пусть $k_1 k_2 < 1$. Выберем из четырех лучей PT_1, PT_2, Pt_1, Pt_2 два таких, которые образуют мажоранту первого рода. Их угловые коэффициенты обозначим $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Можно выбрать главную окрестность столь малой, что возможно построить объемлющие лучи, для которых $\varkappa_1 \varkappa_2 < 1$, следовательно, мажоранта будет дугой сжимающихся спиралей. Значит, на основании теоремы 6, ломаная будет иметь вид спирали, монотонно сходящейся к P.

Если $k_1 k_2 > 1$, то из четырех лучей выберем два таких, которые образуют мажоранту второго рода. Можно главную окрестность построить столь малой, что возможно построить объемлющие лучи, для которых $\varkappa_1 \varkappa_2 > 1$. Но тогда мажоранта будет дугой расширяющихся спиралей, и если P является точкой концентрации, то она есть точка выметания.

Остается рассмотреть случай, когда P есть точка разрыва кривой, и единственная ветвь кривой внутри главной окрестности находится во второй или четвертой четверти.

ТЕОРЕМА 9. *Если внутри главной окрестности точки имеется лишь одна ветвь кривой, и она проходит во второй или четвертой четверти (т. е. P есть точка разрыва), то коль скоро P является точкой концентрации, она есть точка выметания.*

Пусть, например, имеется лишь левая ветвь кривой внутри главной окрестности точки P (фиг. 5). Пусть на ней находится вершина ломаной M_n. Следующая вершина M_{n+1} будет на биссектрисе в первой четверти, а вершина M_{n+2} будет уже вне главной окрестности. Значит, точка P удовлетворяет определению точки выметания.

Этим закончено исследование поведения ломаной в окрестности точки концентрации первого рода. Рассмотрим теперь одно важное свойство точек выметания.

ТЕОРЕМА 10. *Всякая точка выметания, которая является или точкой непрерывности кривой, или концом ветви кривой, проходящей между биссектрисой и осью Y, есть предельная точка точек концентрации второго рода.*

Доказательство сводится, очевидно, к рассмотрению двух случаев.

1. Точка выметания P является концом ветви кривой, проходящей между биссектрисой и осью Y. Положим для определенности, что эта ветвь кривой Γ в окрестности P находится в первой четверти. Построим какую-нибудь главную окрестность Δ точки P.

Рассмотрим произвольную вершину ломаной M_{2p+1} на кривой внутри Δ. Вершины M_{2p} и M_{2p+2} будут на биссектрисе также внутри Δ, причем M_{2p} ближе к P, чем M_{2p+2}. На отрезке PM_{2p} биссектрисы имеется бесконечное множество вершин ломаной M_ν, являющихся элементами начального множества. Возьмем точку M_{ν_0} такую, что $\nu_0 > 2p$. От вершины M_{ν_0} отходит ветвь ломаной, удаляющаяся от P; рассмотрим последовательность M_{ν_0}, M_{ν_0+2}, ... четных вершин этой ветви. Пусть M_{2q+2} первая из вершин этой последовательности, не содержащаяся в отрезке PM_{2p} (такая вершина, конечно, существует). Покажем

что M_{2q+2} лежит внутри отрезка $M_{2p}M_{2p+2}$. Вершина M_{2q} лежит на отрезке PM_{2q}; вследствие монотонности кривой вершина M_{2q+1} будет иметь меньшую ординату, чем M_{2p+1}, а значит M_{2q+2} будет на отрезке PM_{2p+2}. С другой стороны, M_{2q+2} не может совпадать с одной из вершин M_{2p} или M_{2p+2}, так как, ввиду нашего выбора точки M_{ν_0}, имеем $2q+2>2p+2$. Следовательно, M_{2q+2} содержится внутри отрезка $M_{2p}M_{2p+2}$. Выберем теперь точку M_{ν_1} так, что $\nu_1>\nu_0$ (и следовательно $\nu_1>2q+2$). Повторив те же рассуждения, убедимся, что внутри отрезка $M_{2p}M_{2p+2}$ содержится еще точка M_{2q_1+2}, отличная от M_{2q+2}, и т. д. Получим, что внутри отрезка $M_{2p}M_{2p+2}$ содержится бесконечное множество четных вершин ломаной. Следовательно, отрезок $M_{2p}M_{2p+2}$ содержит точку концентрации ломаной, и эта точка концентрации — второго рода. Итак, в произвольной окрестности точки P содержатся точки концентрации второго рода.

2. Кривая в окрестности точки P проходит во второй и четвертой четвертях, P есть точка непрерывности. Построим какую-нибудь главную окрестность Δ точки P. Нетрудно показать, что внутри Δ содержится, по крайней мере, один полный завиток расширяющейся спирали, например, $M_{2p}M_{2p+1}M_{2p+2}M_{2p+3}M_{2p+4}$, где M_{2p} и M_{2p+4} — вершины ломаной, лежащие на биссектрисе внутри Δ по одну и ту же сторону от P. Область, ограниченную этим завитком и отрезком $M_{2p}M_{2p+4}$, обозначим G. Внутри G содержится бесконечно много точек начального множества. Выберем из них точку M_{ν_0} такую, что $\nu_0>2p$ (и следовательно, $\nu_0>2p+4$). От точки M_{ν_0} исходит расширяющаяся спираль, которая через конечное число звеньев должна выйти из области G, что можно осуществить только через отрезок $M_{2p}M_{2p+4}$. Но это значит, что внутри отрезка $M_{2p}M_{2p+4}$ содержится вершина ломаной M_{2q+4}, где $2q+4>2p+4$. Рассматривая последовательность точек начального множества $M_{\nu_0}, M_{\nu_1}, M_{\nu_2}, \ldots$ $(\nu_0<\nu_1<\nu_2<\ldots)$, убедимся, что отрезок $M_{2p}M_{2p+4}$ содержит бесконечно много четных вершин ломаной, а значит, содержит точку концентрации второго рода.

Итак, произвольная главная окрестность точки P содержит точку концентрации второго рода.

Замечание. Если точка выметания есть точка разрыва кривой, то она может не быть предельной точкой точек концентрации. Это возможно, если в главной окрестности кривая проходит в четной четверти (фиг. 5). Подробнее об этом случае см. в следующем параграфе.

Из всего изложенного в настоящем параграфе вытекает

ТЕОРЕМА 11. *Если ломаная итерации непрерывной кривой имеет точку концентрации первого рода, то она имеет или только одну, или бесконечное множество точек концентрации.*

Или более общая:

ТЕОРЕМА 11а. *Пусть данная кривая такова, что на биссектрисе нет точек, к которым бы примыкала ветвь кривой в месте разрыва с отрицательным угловым коэффициентом касательной. Если для такой кривой*

ломаная итерации имеет точку концентрации первого рода, то она имеет или только одну, или бесчисленное множество точек концентрации.

Приведем примеры ломаных итерации, имеющих точки выметания.

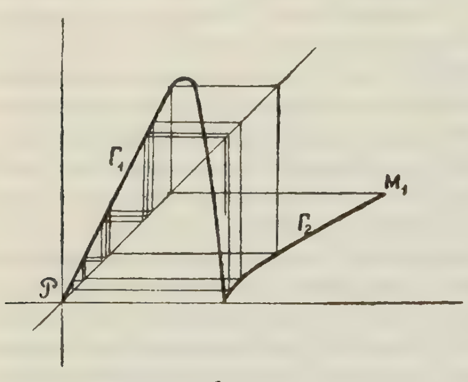
Пример 1. Кривая дана следующими уравнениями:

$$y = px \qquad \text{для } 0 < x \leqslant \frac{q+1}{pq} \text{ (ветвь } \Gamma_1\text{)},$$

$$y = \frac{1}{pq}(x-1)^{\log_q p}[q+(x-1)] \qquad \text{для } 1 < x < 2 \qquad \text{(ветвь } \Gamma_2\text{)}.$$

Здесь p и q — натуральные числа. Для остальных значений x кривая произвольна (фиг. 11).

Ломаная итерации начата построением от точки M_1 на кривой Γ_2 с координатами $x_1 = 2$; $y_1 = \frac{q+1}{pq}$. Оказывается, что ломаная не вырожденная, все ее нечетные вершины расположены на ветвях Γ_1 и Γ_2, четные на соответствующих отрезках биссектрисы. Все точки кривой и биссектрисы, имеющие абсциссы $x = \frac{1}{p^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, являются точками концентрации второго рода. Начало координат есть точка выметания.



Фиг. 11

В самом деле, пусть на ветви Γ_2 имеется вершина M_{k_n} с абсциссой $x_{k_n} = 1 + \frac{1}{q^n}$. Ее ордината будет $y_{k_n} = \frac{1}{p^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right)$. Следующая вершина, M_{ν_n}, $\nu_n = k_n + 1$, будет на биссектрисе, ее координаты будут

$$x_{\nu_n} = y_{\nu_n} = \frac{1}{p^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right) \leqslant \frac{q+1}{pq}.$$

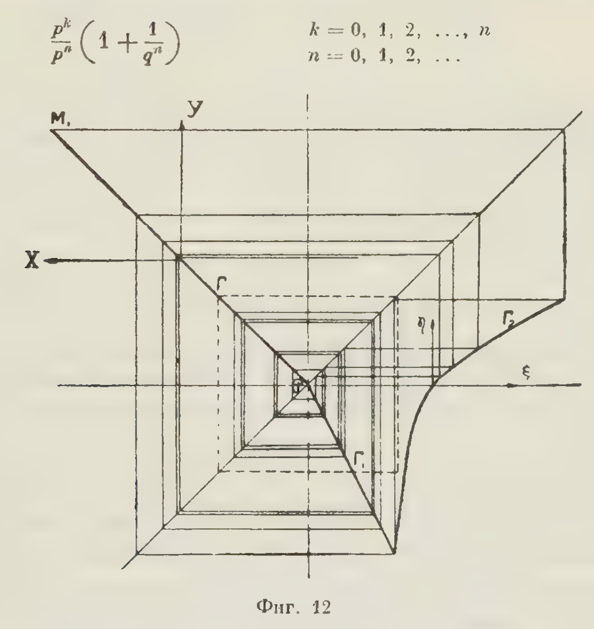
При дальнейшем построении будем иметь лестницеобразную ветвь ломаной, удаляющуюся от начала, причем каждая четная вершина будет иметь абсциссу, в p раз большую, чем предыдущая. Так что через конечное число шагов мы придем к вершине M_{ν_n+2n} (четной) с координатами

$$x_{\nu_n+2n} = y_{\nu_n+2n} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right).$$

Следующая, нечетная вершина M_{ν_n+2n+1}, будет иметь ту же абсциссу, т. е. $x_{\nu_n+2n+1} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right) < \frac{q+1}{pq}$, следовательно, она будет на ветви Γ_1; четная же вершина M_{ν_n+2n+2} будет иметь абсциссу $x_{\nu_n+2n+2} = 1 + \frac{1}{q^{n+1}} > 1$; значит, вершина M_{ν_n+2n+3} будет на ветви Γ_2, причем $x_{\nu_n+2n+3} = 1 + \frac{1}{q^{n+1}}$. Обозначив $\nu_n + 2n + 3 = k_{n+1}$, можем сказать

следующее: отправляясь от точки M_{k_n} на ветви Г с абсциссой $x_{k_n}=1+\frac{1}{q^n}$, мы попадем в окрестность нулевой точки, и через конечное число шагов вернемся на ветвь Γ_2 в точку $M_{k_{n+1}}$ с абсциссой $x_{k_{n+1}}=1+\frac{1}{q^{n+1}}$. Так как начальная точка ломаной M_1 лежит на кривой Γ_2 и имеет абсциссу $x_1=2=1+\frac{1}{q^0}$, то вся ломаная представляет собой неограниченную последовательность циклов описанного вида. Вершины ломаной имеют абсциссы вида

$$\frac{p^k}{p^n}\left(1+\frac{1}{q^n}\right) \qquad \begin{array}{l} k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{array}$$



Фиг. 12

Отсюда легко видеть, что точки кривой и биссектрисы, абсциссы которых имеют вид $x=\frac{1}{p^n}$, $n=0,1,2,\ldots$, являются точками концентрации второго рода. Нулевая точка есть точка выметания. Точки M_{k_n} образуют начальное множество.

Пример 2. Пусть кривая дана следующими уравнениями:

$$y=-x \qquad \text{для} \quad -2\leqslant x\leqslant 0 \qquad (\text{ветвь } \Gamma),$$

$$y=-px \qquad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant \frac{q+1}{pq} \qquad (\text{ветвь } \Gamma_1),$$

$$y=\frac{1}{pq}(x-1)^{\log_q p}[q+(x-1)] \quad \text{для} \quad 1<x\leqslant 2 \qquad (\text{ветвь } \Gamma_2).$$

Здесь p и q — натуральные числа. Для остальных значений x кривая произвольна (фиг. 12).

Ломаная итерации начата построением от точки M_1 с координатами $x_1=-y_1=-2$. Все точки кривой и биссектрисы, имеющие абсциссы

$x = \frac{1}{p^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, являются точками концентрации второго рода. Начало координат есть точка выметания.

В самом деле, построим вспомогательные системы координат, как показано на чертеже: XY (начало в точке $x = -y = -1$) и $\xi\eta$ (начало в точке $x = 1$; $y = 0$). Построим главную окрестность Δ точки P, ограниченную прямыми $x = \pm \frac{q+1}{pq} + \varepsilon$, $y = \pm \frac{q+1}{pq} + \varepsilon$ (на чертеже граница Δ показана пунктиром). Уравнения ветвей Γ_1 и Γ_2 в новых координатах будут:

$$X = Y \qquad \text{(ветвь } \Gamma\text{)}$$

$$\eta = \frac{1}{pq}\, \xi^{\log_q p} (q + \xi) \qquad \text{(ветвь } \Gamma_2\text{)}.$$

Как и в предыдущем примере, подсчет координат последовательных вершин ломаной показывает, что если на ветви Γ_1 имеем вершину M_{k_n} с координатами $X^{(n)} = Y^{(n)} = \frac{1}{q^n}$, то при дальнейшем построении ломаной через два шага мы придем к вершине $\mathfrak{M}^{(n)}$ на ветви Γ_2 с координатами $\xi^{(n)} = \frac{1}{q^n}$; $\eta^{(n)} = \frac{1}{p^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right)$. Следующая вершина, M_{ν_n}, на биссектрисе, будет уже внутри Δ, ее координаты $x_{\nu_n} = y_{\nu_n} = \frac{1}{p^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right)$. Далее ломаная образует расширяющуюся спираль такую, что после каждого оборота абсцисса вершины увеличивается в p раз. Таким образом, $(n+1)$-й завиток спирали уже выйдет за пределы Δ; мы придем к вершине $M_{k_{n+1}}$ на ветви Γ с координатами $X^{(n+1)} = Y^{(n+1)} = \frac{1}{q^{n+1}}$, завершив построение одного цикла ломаной. Так как начальная точка ломаной имеет координаты $X = Y = 1$, то вся ломаная представляет неограниченную последовательность циклов описанного вида. Внутри Δ четные вершины с абсциссами $\frac{1}{p^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{q^{n+1}}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют начальное множество. На ветвях Γ, Γ_1, Γ_2 кривой и на биссектрисе имеем множество вершин ломаной, абсциссы которых имеют вид

$$\frac{p^k}{p^n}\left(1 + \frac{1}{q^n}\right) \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots, n = 1 \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

Легко видеть, что точки с абсциссами $\frac{1}{p^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ будут точками концентрации второго рода.

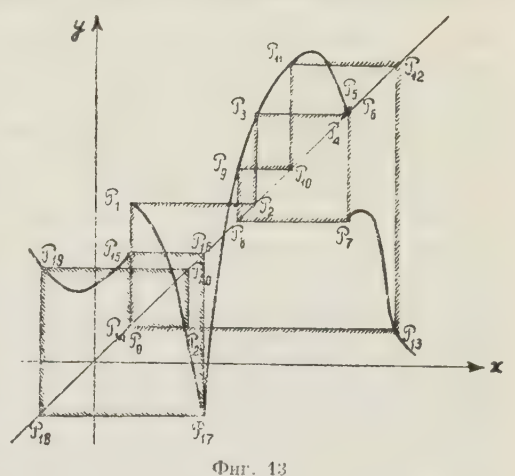
3. Ломаные итерации, имеющие конечное число точек концентрации

Рассмотрим точку кривой P, в которой кривая непрерывна. Как слева, так и справа от P существуют монотонные отрезки кривой γ', γ'', прилегающие к P. Если P есть конец ветви кривой в месте разрыва, то к P также прилегает монотонный отрезок кривой, но лишь с одной стороны. Если P есть точка биссектрисы, то будем рассматривать произвольные отрезки биссектрисы γ', γ'', прилегающие к точке P слева и справа.

Точку P, рассматриваемую в связи с каким-нибудь монотонным отрезком кривой (или отрезком биссектрисы), прилегающим к P, будем называть ориентированной точкой P. Очевидно, каждую точку можно ориентировать не более, чем четырьмя способами.

В дальнейшем будем иногда для краткости конец ветви кривой в месте разрыва называть точкой кривой.

Будем говорить, что точка P_k кривой (биссектрисы) ориентирована соответственно точке P_{k-1} биссектрисы (кривой), имеющей ту же абсциссу (ординату), если ломаная итерации, имеющая вершину на биссектрисе (на монотонном отрезке кривой, прилегающем к P_{k-1}) с избранной стороны точки P_{k-1} достаточно близко к P_{k-1}, будет иметь следующую вершину на монотонном отрезке кривой, прилегающем к P_k (на биссектрисе) с избранной стороны точки P_k.



Фиг. 13

Всякую точку кривой можно, очевидно, ориентировать соответственно точке биссектрисы, имеющей ту же абсциссу. Точку биссектрисы P_k можно ориентировать соответственно точке P_{k-1} кривой в том случае, когда отрезок кривой, прилегающий к P_{k-1}, не есть отрезок прямой, параллельный оси X. В дальнейшем этот последний случай будем исключать, т. е. будем считать отрезки γ', γ'' строго монотонными.

Итерационным многоугольником будем называть многоугольник, построение которого производится следующим образом (фиг. 13). Возьмем на биссектрисе произвольную точку P_0 и ориентируем определенным образом относительно биссектрисы. Проведем через P_0 прямую, параллельную оси Y. Если абсцисса точки P_0 есть точка непрерывности функции $y=\varphi(x)$, то эта прямая пересечет кривую в некоторой точке P_1; если абсцисса точки P_0 есть точка разрыва функции $y=\varphi(x)$, то на этой прямой будут лежать концы двух ветвей кривой, из которых выберем тот, который можно ориентировать относительно кривой соответственно точке P_0; обозначим его P_1. Ориентировав точку P_1 в том и другом случае соответственно точке P_0, проведем через P_1 прямую, параллельную оси X до пересечения с биссектрисой в точке P_2, которую ориентируем относительно биссектрисы соответственно точке P_1, и т. д. Если, построив таким образом конечное число точек $P_1, P_2, \ldots, \ldots, P_{n-1}$, мы опять придем к точке P_0, то многоугольник $P_0P_1P_2 \ldots \ldots P_{n-1}P_0$ и будет итерационным. Точки P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}

и только их будем называть вершинами итерационного многоугольника.

При построении итерационного многоугольника может случиться, что для некоторого k вершина P_{2k+1} совпадает с P_{2k}, тогда P_{2k+2} также совпадает с P_{2k} и с P_{2k+1}. Это будет в том случае, когда P_{2k} есть конец ветви кривой, прилегающей к P_{2k} со стороны, соответствующей ориентации точки P_{2k}. Если при этом P_{2k} соответствует разрыву кривой, и ветвь кривой, имеющая концом P_{2k}, имеет отрицательный угловой коэффициент в окрестности P_{2k}, то P_{2k+3} будет отлична от P_{2k} (фиг. 13, вершина P_4). Если же P_{2k} есть точка непрерывности кривой, и угловой коэффициент обеих ветвей кривой в окрестности P_{2k} отрицателен, то P_{2k+3}, а значит и P_{2k+4} совпадает с P_{2k}; итерационый многоугольник вырождается в точку. Точно так же, если ветвь кривой, прилегающая к P_{2k} соответственно ориентации P_{2k}, имеет в окрестности P_{2k} положительный угловой коэффициент, то итерационный многоугольник сводится к одной точке P_{2k}.

Заметим, что если среди вершин итерационного многоугольника нет точек разрыва кривой, то такой многоугольник есть не что иное как замкнутая (вырожденная) ломаная итерации.

Положительным направлением обхода итерационного многоугольника будем считать то, при котором вершина P_k, лежащая на кривой, следует за той вершиной P_{k-1}, лежащей на биссектрисе, которая имеет ту же абсциссу, что и P_k (следовательно, вершина P_l, лежащая на биссектрисе, следует за вершиной P_{l-1}, лежащей на кривой, имеющей ту же ординату, что и P_l).

З а м е ч а н и е. Мы построили итерационный многоугольник, используя понятие ориентированной точки. Однако термин «итерационный многоугольник» обозначает полученный в результате описанных операций многоугольник, рассматриваемый в обычном смысле, не принимая во внимание ориентации вершин.

Рассмотрим какую-нибудь вершину данного итерационного многоугольника, лежащую на биссектрисе, обозначим ее P_0, ориентируем каким-нибудь способом относительно биссектрисы и, начав от P_0 обход многоугольника в положительном направлении, будем ориентировать каждую вершину соответственно предыдущей и обозначать их попрежнему: P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}. Переходя от P_{n-1} к P_0, ориентируем P_0 второй раз, в соответствии с ориентацией P_{n-1}. Вообще говоря, точка P_0 будет ориентирована теперь иначе, чем вначале. Обозначим P_n ориентированную второй раз точку P_0. Многоугольник $P_0 P_1 \ldots P_{n-1} P_n$, вершины которого ориентированы описанным способом, назовем *ориентированным итерационным многоугольником*. Один и тот же итерационный многоугольник можно ориентировать, вообще говоря, несколькими способами. Поэтому будем строго различать понятия: «итерационный многоугольник» и «ориентированный итерационный многоугольник».

Если ориентированные вершины P_0 и P_n совпадают, то ориентиро-

ванный итерационный многоугольник $P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_n$ будем называть *замкнутым*.

Если ориентированный итерационный многоугольник $P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_n$ незамкнутый, т. е. P_n не совпадает с P_0, то, исходя от P_n, построим новый ориентированный итерационный многоугольник $P_nP_{n+1} \ldots P_N$, если это возможно (в том случае, когда среди вершин многоугольника $P_0P_1 \ldots P_n$ имеются точки разрыва, это возможно не всегда). Если многоугольник $P_nP_{n+1} \ldots P_N$ окажется незамкнутым, то его ориентированная вершина P_N будет совпадать с ориентированной вершиной P_0. Тогда мы скажем, что определен замкнутый ориентированный итерационный многоугольник $P_0P_1 \ldots P_n \ldots P_N$.

Заметим, что если у итерационного многоугольника $P_0P_1 \ldots P_n$ все нечетные вершины суть точки непрерывности кривой, то итерационный многоугольник $P_nP_{n+1} \ldots P_N$ (не ориентированный) совпадает с первым, и при обходе ориентированного итерационного многоугольника $P_0P_1 \ldots P_n \ldots P_N$ каждая сторона многоугольника $P_0P_1 \ldots \ldots P_{n-1}P_0$ проходится два раза. При этом вершина (не ориентированная) P_{n+1} совпадает с P_i и $N=2n$.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть P есть итерационный многоугольник с n вершинами, все нечетные вершины которого суть точки непрерывности кривой. Если, кроме того, в каждой из нечетных вершин кривая монотонна, то или существует два и только два различных замкнутых ориентированных итерационных многоугольника P с числом вершин каждого n, или только один замкнутый ориентированный итерационный многоугольник P с числом вершин $2n$. Если же среди нечетных вершин по крайней мере одна является точкой экстремума кривой, то существует один и только один ориентированный замкнутый многоугольник, и число вершин последнего равно n.*

Пусть дан итерационный многоугольник $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_0$. Заметим, что в виду непрерывности кривой в вершинах многоугольника к каждой вершине прилегают или только отрезки кривой или только отрезки биссектрисы, и значит, каждую вершину можно ориентировать двумя и только двумя способами.

Первая часть теоремы очевидна. Докажем вторую часть. Ориентируем какую-нибудь четную вершину, допустим P_0 некоторым способом и соответственно ориентируем остальные вершины, обозначая их теперь $P_0', P_1' \ldots$ Если ориентированный итерационный многоугольник $P_0'P_1' \ldots \ldots P_n'$ замкнутый, то первое утверждение второй части теоремы справедливо. Если многоугольник $P_0'P_1' \ldots P_n'$ незамкнутый, то ориентируем вершину P_0 иначе, чем в первый раз, и соответственно ориентируем остальные вершины, обозначая их теперь $P_0'', P_1'' \ldots P_n''$. Пусть P_k вершина многоугольника P, являющаяся точкой экстремума кривой, такая, что среди вершин $P_1, P_3, \ldots, P_{k-2}$ нет точек экстремума. Вершины $P_0'', P_1'', \ldots, P_k''$ будут отличны соответственно от $P_0', P_1', \ldots, P_k'$, а P_{k+1}'' совпадает с P_{k+1}'. Но тогда все последующие вершины P_i'' $(i=k+1, k+2, \ldots, n)$ совпадают соответственно с вершинами P_i' $(i=k+1,$

$k+2, \ldots, n$). Следовательно P''_n совпадает с P'_n, т. е. совпадает с P''_0. Таким образом, многоугольник $P''_0 P''_1 \ldots P''_n$ замкнутый. Из того же построения видно, что не может быть замкнутого ориентированного итерационного многоугольника с числом вершин больше n.

Докажем, что не может быть более одного замкнутого ориентированного итерационного многоугольника P. Предположим, что, кроме данного замкнутого ориентированного многоугольника $P^*_0 P^*_1 \ldots P^*_n$, существует отличный от него замкнутый ориентированный многоугольник $P'_0 P'_1 \ldots P'_n$. Значит, существует вершина P_k такая, что P^*_k и P'_k различны, т. е. они получаются путем различного ориентирования вершины P_k. Существует вершина P_l, в которой кривая имеет экстремум, но среди вершин $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_{l-1}$ нет точек экстремума. Вершины $P^*_{k+1}, \ldots, P^*_{l-1}, P^*_l$ отличны соответственно от вершин $P'_{k+1}, P'_{k+2}, \ldots, P'_l$, а вершины P^*_{l+1} и P'_{l+1} совпадают (ввиду замкнутости ориентированных многоугольников безразлично, будет ли $l < k$, $l > k$ или $l = k$). Но тогда совпадают вершины $P^*_{l+2}, \ldots, P^*_k$ соответственно с вершинами $P'_{l+2}, \ldots, P'_k$, что противоречит предположению о том, что P^*_k и P'_k различны.

Ориентированной точкой концентрации назовем точку концентрации P, рассматриваемую в связи с определенной ветвью кривой или биссектрисы, имеющей концом данную точку, на которой в любой близости к P находятся вершины ломаной итерации.

Предельным многоугольником ломаной итерации будем называть итерационный многоугольник, все вершины которого суть точки концентрации ломаной.

Ориентированным предельным многоугольником ломаной итерации будем называть замкнутый ориентированный итерационный многоугольник, все вершины которого суть точки концентрации, ориентированные так же, как вершины многоугольника.

ТЕОРЕМА 13. *Если ломаная итерации имеет конечное число точек концентрации, то существует конечное число предельных многоугольников этой ломаной, а также конечное число ориентированных предельных многоугольников. Вершинами этих многоугольников исчерпываются все точки концентрации данной ломаной. Если число точек концентрации больше единицы, то ни один из предельных многоугольников не вырождается в точку.*

Если ломаная итерации имеет единственную точку концентрации, то эту точку можно считать вырожденным предельным многоугольником.

Пусть ломаная итерации имеет n точек концентрации, $n > 1$. По крайней мере одна из этих точек лежит на биссектрисе. Рассмотрим одну из таких точек, обозначив ее P_0. К этой точке или не прилегает ветвь кривой ни с какой стороны, или является концом одной из ветвей кривой в месте разрыва, ибо если бы через P_0 проходила непрерывная дуга кривой, то P_0 была бы или единственной точкой концентрации, или предельной точкой бесконечного множества точек концентрации.

Ориентируем P_0 относительно биссектрисы с той стороны, с которой на биссектрисе, в любой близости от P_0 имеются вершины ломаной. Исходя от этой ориентированной точки P_0, будем выполнять построение, которое мы делали при определении итерационного многоугольника. Очевидно, получающиеся при этом вершины $P_0, P_1, \ldots$ будут точками концентрации, ориентированными каждая в соответствии с предыдущей. При этом мы не можем встретить точки P_k, к которой с рассматриваемой стороны прилегает кривая в виде отрезка прямой, параллельной оси X, так как в этом случае ломаная итерации была бы вырожденной. Ломаная $P_0P_1 \ldots$ должна замкнуться, так как число точек концентрации конечно. Ясно также, что ориентированный итерационный многоугольник $P_0P_1 \ldots$ также должен замкнуться по той же причине. Получим один ориентированный предельный многоугольник и один или несколько предельных многоугольников. Если этим построением мы не исчерпывали всех точек концентрации ломаной, то рассмотрим оставшиеся и повторим то же построение. После конечного числа таких операций мы, в конце концов, исчерпаем все n точек концентрации ломаной. В результате получим конечное число предельных многоугольников и ориентированных предельных многоугольников. Ни один из них не может сводиться к точке, так как тогда ломаная итерации имела бы или одну или бесконечно много точек концентрации.

Пусть дан ориентированный итерационный многоугольник $P_0P_1 \ldots P_N$. Обозначим $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{N-1}$ монотонные непрерывные отрезки кривой, прилегающие соответственно к вершинам $P_1, P_3, \ldots P_{N-1}$. На биссектрисе вблизи точки P_0 (с той стороны, которая соответствует ориентации этой точки) можно взять точку Q_0, столь близкую к P_0, что если начать от нее строить ломаную итерации $Q_0Q_1Q_2 \ldots Q_N \ldots$, то ее вершины $Q_1, Q_3, \ldots, Q_{N-1}$ будут находиться соответственно на отрезках $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{N-1}$ столь близко к вершинам $P_1, P_3, \ldots, P_{N-1}$, что отрезки кривой и биссектрисы $P_0Q_0, P_1Q_1, \ldots, P_NQ_N$, которые мы будем обозначать соответственно $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*$, будучи, конечно, монотонными и непрерывными, не будут иметь попарно общих точек, за исключением следующих случаев:

1) если ориентированные вершины P_j и P_k определяются различной ориентировкой одной и той же вершины итерационного многоугольника, то эта вершина является общей точкой отрезков γ_i^* и γ_k^*;

2) отрезки γ_0^* и γ_N^* имеют во всяком случае общую точку — вершину P_0, а если наш ориентированный итерационный многоугольник замкнутый, то или один из γ_0^* и γ_N^* содержится в другом, или даже они совпадают.

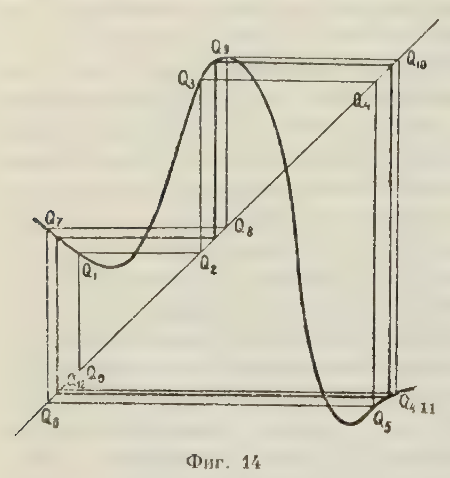
Из произвольной точки $\mathfrak{M}_0$ отрезка γ_0^* будем строить ломаную итерации $\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \ldots$; ее вершины $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_N$ будут лежать на отрезках $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_N^*$. Будем рассматривать лишь конечные ломаные $\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_N$. Всякая точка любого из отрезков $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*$ является вершиной одной из таких ломаных. Область, заполняемую всевозможными ломаными такого рода, будем называть *окрестной полосой* ориентированного итерационного многоугольника.

Ломаную $Q_0 Q_1 \ldots Q_N$ назовем *внешней границей* полосы; отрезок $Q_0 Q_N$ — *отрезком замыкания* (фиг. 14).

Легко убедиться, что ввиду монотонности отрезков $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*$ окрестная полоса обладает следующими свойствами:

1. Ломаная итерации, имеющая вершину на каком-либо из отрезков γ_i^* окрестной полосы, при дальнейшем построении проходит последовательно отрезки $\gamma_{i+1}^*, \gamma_{i+2}^*, \ldots$ достигая, наконец, последнего отрезка γ_N^*.

2. Если две ломаные итерации L' и L'' имеют на отрезке γ_i^* соответственно вершины M' и M'', то в случае, когда M' ближе к P_i, чем M'', при дальнейшем построении вершины ломаной L' будут ближе к вершинам итерационного многоугольника, чем соответствующие вершины L'', пока ломаная не выйдет за пределы окрестной полосы.



Фиг. 14

Кроме того, принимая во внимание непрерывность отрезков $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*$, можно доказать следующее свойство окрестной полосы:

3. Пусть на отрезке $\gamma_{k_0}^*$ находятся вершины M'_ν и M''_μ ломаных итерации L' и L'', и вершины $M'_{\nu+i}$ и $M''_{\mu+i}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ этих ломаных также находятся внутри окрестной полосы. Тогда вершины $M'_{\nu+p}$ и $M''_{\mu+p}$ находятся на одном и том же отрезке $\gamma_{k_1}^*$, причем если изменять ломаную L'' так, чтобы M''_μ стремилось к M'_ν, то $M''_{\mu+p}$ будет стремиться к $M'_{\nu+p}$.

Мы построили окрестную полосу, взяв точку Q_0 вблизи вершины P_0 с определенной стороны от последней. Если вершина Q_N внешней границы полосы окажется с той же стороны, то будем называть такую окрестную полосу *замкнутой окрестной полосой*. Если же точка Q_N будет по другую сторону от P_0, чем Q_0, то окрестную полосу будем называть *открытой*.

Окрестной полосой итерационного многоугольника P будем называть окрестную полосу какого-нибудь ориентированного итерационного многоугольника P.

Можно показать, что всякая окрестная полоса ориентированного замкнутого итерационного многоугольника есть замкнутая, а всякая окрестная полоса ориентированного незамкнутого итерационного многоугольника — открытая.

В самом деле, пусть P_0 есть начальная вершина замкнутого итерационного многоугольника. Значит, можно взять точку Q_0^* столь близко к P_0, что окрестная полоса Δ^* с внешней границей $Q_0^* Q_1^* \ldots Q_N^*$ будет замкнутая, т. е. Q_N^* будет по ту же сторону от P_0, что и Q_0^*. Рассмо-

трим произвольную окрестную полосу Δ с внешней границей $Q_0Q_1 \ldots Q_N^*$, где Q_0 взята по ту сторону от P_0, которая соответствует ориентации точки P_0. Построим теперь окрестную полосу Δ' с внешней границей $Q_0'Q_1' \ldots Q_N'$, где Q_0' лежит между P_0 и Q_0. В силу свойств окрестной полосы, Q_N' должна быть между P_0 и Q_N. Следовательно, если Δ замкнутая полоса, то и Δ' замкнутая, если Δ открытая, то и Δ' открытая. Но так как существует замкнутая окрестная полоса Δ^*, то всякая окрестная полоса замкнутая.

Таким же образом докажем, что для ориентированного незамкнутого итерационного многоугольника всякая окрестная полоса — открытая.

Будем говорить, что ломаная итерации *монотонно* приближается к замкнутому ориентированному многоугольнику P, если, какова бы ни была окрестная полоса Δ многоугольника P, можно указать такую вершину ломаной, начиная с которой вся ломаная лежит внутри Δ*.

Многоугольником выметания называется замкнутый ориентированный итерационный многоугольник, к которому никакая ломаная итерации не может приближаться монотонно.

Многоугольником сходимости назовем замкнутый ориентированный многоугольник, у которого имеется окрестная полоса, обладающая следующим свойством: всякая ломаная итерации, вершина которой содержится внутри Δ, при дальнейшем построении монотонно приближается к многоугольнику.

Предельным многоугольником множества $\mathfrak{P}$ *итерационных многоугольников* будем называть замкнутый ориентированный итерационный многоугольник P, в любой окрестной полосе которого целиком содержится бесконечно много итерационных многоугольников множества $\mathfrak{P}$.

В качестве примера можно привести ориентированный итерационный многоугольник P для кривой, отрезки которой в окрестностях нечетных вершин суть отрезки прямой с угловыми коэффициентами $k_1 k_2, \ldots, k_p$. Простой подсчет координат последовательных вершин ломаной, начатой построением внутри окрестной полосы, показывает, что если $k_1 k_2 \ldots k_p < 0$, то многоугольник P незамкнутый. Если $0 < k_1 k_2 \ldots k_p < 1$, то P есть многоугольник сходимости, если $k_1 k_2 \ldots k_p > 1$, то P есть многоугольник выметания, а при $k_1 k_2 \ldots k_p = 1$ он есть предельный многоугольник множества итерационных многоугольников, так как ломаная, начатая построением в любой точке внутри окрестной стороны, замкнется, и, следовательно, она будет итерационным многоугольником, содержащимся внутри Δ.

Можно построить также итерационный многоугольник P, в любой окрестной полосе которого содержится лишь счетное изолированное множество итерационных многоугольников. Каждая вершина многоугольника P будет предельной точкой последовательности вершин

---

* Это специфическое определение понятия «монотонная сходимость» для ориентированного многоугольника нужно потому, что ломаная итерации может приближаться к данному многоугольнику с разных сторон различным образом.

итерационных многоугольников, расположенных на отрезке кривой или биссектрисы, прилегающей к этой вершине.

Пусть, например, кривая на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ определена так:

$$y = f(x) + M(x+1)^4 \sin \frac{\pi}{x+1} \quad \text{для} \quad -1 \leqslant x < 0,$$
$$x = f(y) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Здесь $f(x)$ — функция, монотонная и непрерывная вместе с производными первого и второго порядка на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 0$, причем

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = 1,$$
$$|f'(x)| > K_1, \quad |f''(x)| > K_2 \quad \text{для} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0; \quad K_1 > 0, \ K_2 > 0.$$
$$M \leqslant \frac{P}{50}, \quad P = \min(K_1, K_2).$$

Таким образом, в каждом из промежутков $[-1; 0]$; $[0; 1]$ кривая монотонна, имеет непрерывно вращающуюся касательную и определенное направление вогнутости. Для этой кривой существует итерационный квадрат R, абсциссы вершин которого равны -1 и 1. Кроме того, существует счетное множество итерационных квадратов R_n, абсциссы вершин каждого из которых будут $\pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, квадрат R является предельным для множества квадратов R_n.

Рассмотрим еще достаточный признак, позволяющий судить о характере данного итерационного многоугольника:

Пусть P есть ориентированный замкнутый итерационный многоугольник с числом вершин $N = 2n$; $k_1 k_2, \ldots, k_n$ угловые коэффициенты кривой в нечетных вершинах многоугольника с той стороны, какая соответствует ориентации вершин. Если $k_1 k_2 \ldots k_n > 1$, то P есть многоугольник выметания; если $k_1 k_2 \ldots k_n < 1$, то P есть многоугольник сходимости.

Построим окрестную полосу Δ многоугольника P, приняв точку P_0 за начальную; абсциссу точки P_0 обозначим ξ_0. Возьмем точку M_0 отрезка биссектрисы $P_0 Q_0$ с абсциссой x_0 и будем строить ломаную итерации от точки M_0. Простой подсчет координат вершин ломаной показывает, что после одного полного обхода окрестной полосы получим вершину ломаной M_N вблизи точки P_0 с абсциссой $x_N = \xi_0 + (x_0 - \xi_0)\varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_n$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — угловые коэффициенты хорд, соединяющих вершины ломаной с соответствующими вершинами многоугольника. Так как многоугольник P замкнутый, то $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n > 0$. Если $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n < 1$, то M_N ближе к P_0, чем M_0; если $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n > 1$, то M_N дальше от P_0, чем M_0. Обозначим $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_n'$ минимумы, а $\varkappa_1'', \varkappa_2'', \ldots, \varkappa_n''$ максимумы модулей угловых коэффициентов хорд, соединяющих нечетную вершину многоугольника с точками отрезка кривой внутри Δ, прилегающего к этой вершине. Пусть $k_1 k_2 \ldots k_n < 1$. Можно построить окрестную полосу Δ такую, что также $\varkappa_1'' \varkappa_2'' \ldots \varkappa_n'' < 1$. Тогда очевидно для всякой ломаной внутри Δ будет $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n < 1$; т. е. P есть многоугольник сходимости. Пусть теперь $k_1 k_2 \ldots k_n > 1$. Можно построить окрестную полосу Δ такую, что также $\varkappa_1' \varkappa_2' \ldots \varkappa_n' > 1$.

Для всякой ломаной внутри Δ будет $x_1 x_2 \ldots x_n > 1$, т. е. P будет многоугольником выметания.

ТЕОРЕМА 14. *Всякий ориентированный замкнутый итерационный многоугольник есть или многоугольник сходимости, или многоугольник выметания, или является предельным многоугольником множества итерационных многоугольников.*

Если данный замкнутый ориентированный итерационный многоугольник P является предельным для множества итерационных многоугольников, то справедливо последнее утверждение теоремы. Пусть этого нет. Тогда можно построить замкнутую окрестную полосу Δ, не содержащую ни одного итерационного многоугольника, кроме данного многоугольника $P_0 P_1 \ldots P_n$. Окрестная полоса может быть выбрана так, что ее внешняя граница $Q_0 Q_1 \ldots Q_N$ (N — число вершин ориентированного многоугольника P) будет незамкнута, т. е. Q_N не совпадает с Q_0.

Пусть Q_N ближе к P_0, чем Q_0. Будем продолжать строить ломаную итерации $Q_0 Q_1 \ldots Q_N$ от Q_N далее; обозначим ее $L(Q_0)$. Так как Q_N ближе к P_0, чем Q_0, то вследствие свойств окрестной полосы ломаная $L(Q_0)$ будет приближаться к многоугольнику, именно последовательность вершин ломаной на каждом отрезке γ_i^* $(i = 0, 1, \ldots N)$ кривой биссектрисы будет монотонно приближаться к соответствующей вершине P_i.

В частности, на отрезке $P_0 Q_0$ будем иметь последовательность вершин ломаной Q_0, Q_N, $Q_{2N}, \ldots$, монотонно приближающуюся к P_0. Докажем, что эта последовательность сходится к точке P_0. Предположим, что этого нет. Тогда последовательность Q_0, Q_N, $Q_{2N}, \ldots$ сходится к точке P_0' внутри отрезка $P_0 Q_0$. Начнем строить ломаную итерации $L(P_0')$ от точки P_0'. Эта ломаная пройдет последовательно отрезки γ_i^* $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$, и мы получим ее вершину P_N' на отрезке $P_0 Q_0$. Вследствие свойства 3 окрестной полосы к вершинам P_i' $(i = 0, 1, \ldots, N)$ ломаной $L(P_0')$ сходятся последовательности вершин ломаной $L(Q_0)$, расположенные на отрезках $P_i Q_i$. В частности, последовательность Q_N, $Q_{2N}, \ldots$ сходится к P_N'. Следовательно, P_N' совпадает с P_0', т. е. внутри Δ мы имеем итерационный многоугольник $P_0' P_1' \ldots P_N'$, что противоречит построению окрестной полосы.

Итак, последовательность $Q_0, Q_N, Q_{2N}, \ldots$ сходится к P_0. Но тогда последовательности вершин ломаной $L(Q_0)$ на отрезках $P_i Q_i$ сходятся к соответствующим вершинам P_i, т. е. ломаная монотонно сходится к многоугольнику $P_0 P_1 \ldots P_N$. Пусть какая-нибудь ломаная итерации L имеет вершину M_k внутри Δ. Если M_k совпадает с одной из вершин ломаной $L(Q_0)$, то ломаная L будет совпадать, начиная с этой вершины, с ломаной $L(Q_0)$, следовательно, сходится монотонно к многоугольнику P. Если M_k не совпадает ни с одной из вершин ломаной $L(Q_0)$, то она находится между двумя вершинами Q_{s_0} и Q_{s_0+N} этой ломаной, находящимися на том же отрезке кривой или биссектрисы, как и M_k. Но тогда, в силу свойств окрестной полосы, при дальнейшем построе-

нии L ее вершины будут все время находиться между вершинами Q_s и Q_{s+N} ($s \to \infty$). Значит, ломаная L также монотонно сходится к многоугольнику P. Этим доказано, что ориентированный многоугольник P есть многоугольник сходимости.

Пусть теперь Q_N далее от P_0, чем Q_0. Докажем, что внутри Δ нет ни одной точки, начиная от которой построение ломаной итерации мы получили бы ломаную, приближающуюся к P. Предположим, что такая точка существует. Начиная от нее, мы построим ломаную итерации L, монотонно приближающуюся к P. Рассмотрим вершину M_{k_0} ломаной L на отрезке P_0Q_0. Как доказано выше, все точки отрезка $P_0M_{k_0}$ обладают свойством выпускать ломаные, монотонно сходящиеся к P. Рассмотрим множество K_1 всех точек отрезка P_0Q_0, обладающих таким свойством, и множество K_2 точек, не обладающих таким свойством. Множеству K_2 принадлежит, например, точка Q_0. Множества K_1 и K_2 образуют сечение, определяющее некоторую точку P_0' в отрезке P_0Q_0. Отправляясь от P_0', построим ломаную итерации и рассмотрим отрезок этой ломаной $P_0'P_1'\ldots P_N'$. Точка P_N' будет на отрезке P_0Q_0. Пусть P_N' далее от P_0, чем P_0'. Возьмем точку M_N' между P_0' и P_N' и будем строить ломаную в направлении, обратном обычному, но так, чтобы она не выходила за пределы Δ (это обеспечит однозначность построения). Обойдя все отрезки P_iQ_i, мы придем в точку M_0' между P_0 и P_0'. Тогда, если начать построение ломаной от точки M_0' в обычном порядке, мы получим ломаную L' и через N звеньев придем в точку M_N'. Но это невозможно, так как точка M_0' принадлежит множеству K_1. Итак, P_N' не может быть далее от P_0, чем P_0'. Так же докажем, что P_N' не может быть ближе к P_0, чем P_0'. Следовательно, P_N' совпадает с P_0'. Но тогда мы будем иметь итерационный многоугольник $P_0'P_1'\ldots P_N'$ внутри окрестной полосы, что противоречит построению последней.

Итак, если Q_0 заключается между P_0 и Q_N, то в случае, когда некоторая ломаная итерации L имеет вершину внутри Δ, при дальнейшем построении она монотонно удаляется от P (т. е. на каждом отрезке кривой или биссектрисы внутри Δ, прилегающем к некоторой вершине P, образуется последовательность вершин ломаной, монотонно удаляющаяся от этой вершины). Такая ломаная через конечное число звеньев выходит из окрестной полосы, так как в противном случае она должна сходиться к некоторому итерационному многоугольнику, содержащемуся в окрестной полосе, что невозможно. Значит, рассматриваемый ориентированный многоугольник P есть многоугольник выметания.

ТЕОРЕМА 15. *Замкнутый ориентированный итерационный многоугольник, являющийся предельным многоугольником множества итерационных многоугольников, не может быть ориентированным предельным многоугольником ломаной итерации.*

Пусть замкнутый ориентированный итерационный многоугольник P является предельным многоугольником множества $\mathfrak{P}$ итерационных многоугольников. Очевидно, каждый из многоугольников множества $\mathfrak{P}$, целиком содержащийся внутри окрестной полосы Δ многоугольника P,

представляет собой замкнутую (вырожденную) ломаную итерации, число вершин которой равно числу ориентированных вершин многоугольника P.

Предположим, что P есть предельный многоугольник ломаной итерации L. Рассмотрим окрестную полосу Δ с внешней границей $Q_0Q_1\ldots Q_N$. Отрезок P_0Q_0 содержит как вершины ломаной L, так и вершины многоугольников, принадлежащих множеству $\mathfrak{P}$. Если какая-нибудь вершина ломаной L внутри Δ совпадает с одной из вершин некоторого многоугольника, принадлежащего множеству $\mathfrak{P}$, то ломаная L вырожденная, и многоугольник P не может быть для нее предельным. Если этого нет, то найдется вершина M_k ломаной L, заключенная между вершинами $\mathfrak{P}_0'$ и $\mathfrak{P}_0''$ двух многоугольников $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$ множества $\mathfrak{P}$, содержащимися внутри отрезка P_0Q_0. В силу свойств окрестной полосы ломаная L, начиная с вершины M_k, будет находиться между многоугольниками $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$; следовательно, P не может быть предельным многоугольником ломаной L.

Начальным множеством вершин ломаной итерации, принадлежащим данной окрестной полосе Δ замкнутого ориентированного итерационнного многоугольника, будем называть множество, состоящее из следующих точек:

1) вершин M_ν ломаной итерации, содержащихся внутри Δ на биссектрисе, и таких, что вершина $M_{\nu-1}$ не лежит на отрезке γ_i^* кривой внутри Δ, примыкающей к предшествующей вершине многоугольника;

2) вершины M_1, если она лежит внутри Δ на одном из отрезков γ кривой, прилегающих к вершинам многоугольника.

Очевидно, что если многоугольник выметания является ориентированным предельным многоугольником ломаной итерации, то любая его окрестная полоса содержит бесконечное начальное множество.

ТЕОРЕМА 16. *Если итерационный многоугольник, все нечетные вершины которого суть точки непрерывности кривой, является предельным многоугольником ломаной итерации, то по крайней мере один замкнутый ориентированный многоугольник есть ориентированный предельный многоугольник ломаной.*

Для случая, когда все нечетные вершины многоугольника суть точки монотонности кривой, это очевидно. Докажем, что если среди вершин предельного многоугольника имеются точки экстремума, то единственный (теорема 12) замкнутый итерационный многоугольник является ориентированным предельным многоугольником.

Предположим, что теорема неверна. Как доказано выше, существует только один замкнутый ориентированный многоугольник P, и число его ориентированных вершин равно числу вершин многоугольника P. Построим окрестную полосу Δ^* ориентированного замкнутого многоугольника P, не содержащую вершин ломаной. Рассмотрим вершину P_0. В любой окрестности этой вершины на биссектрисе содержатся вершины ломаной L с той стороны точки P_0, которой принадлежит открытая окрестная полоса Δ (как было показано, одна сторона любой

из вершин принадлежит замкнутому, другая — незамкнутому ориентированному многоугольнику). Если взять произвольную вершину M_k ломаной L внутри Δ вблизи P_0, то, так как полоса Δ открытая, вершина M_{k+n} будет вблизи P_0 по иную сторону от P_0, чем M_k. В силу свойств окрестной полосы, если выбрать M_k достаточно близкой к P_0, то M_{k+n} будет столь близкой к P_0, что окажется внутри Δ^*, а это противоречит построению Δ^*.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть ломаная итерации имеет конечное число точек концентрации. Все точки концентрации являются вершинами единственного замкнутого ориентированного итерационного многоугольника, к которому ломаная приближается монотонно.*

Как было доказано (теорема 13), точки концентрации данной ломаной являются вершинами ориентированных замкнутых итерационных многоугольников. Рассмотрим один такой многоугольник P и докажем, что кроме вершин этого многоугольника ломаная не имеет иных точек концентрации. Построим окрестную полосу Δ многоугольника P с внешней границей $Q_0Q_1 \ldots Q_N$ такую, чтобы удовлетворялись следующие условия: 1) внутри Δ не помещается целиком ни один итерационный многоугольник, 2) Q_0 не совпадает с Q_N, 3) отрезок Q_0Q_N не содержит точек концентрации ломаной.

Предположим, что P есть многоугольник выметания. Тогда внутри Δ содержится бесконечное начальное множество, от каждой точки которого отходит ветвь ломаной, выходящая через конечное число звеньев за пределы Δ. Но выйти за пределы Δ ломаная может только через отрезок Q_0Q_N. Каждой точке начального множества соответствует вершина ломаной на отрезке Q_0Q_N, и наоборот. Следовательно, отрезок Q_0Q_N содержит точку концентрации ломаной, что противоречит построению окрестной полосы Δ. Следовательно, невозможно, чтобы P был многоугольником выметания. Значит, он есть многоугольник сходимости, а поэтому ломаная итерации, начиная с некоторой вершины, монотонно сходится к P. Отсюда следует, что кроме P, нет иных предельных многоугольников ломаной. А значит, нет и иных точек концентрации, отличных от вершин многоугольника P.

Следствие. *Для того, чтобы ломаная итерации имела конечное число точек концентрации, необходимо, чтобы для данной кривой существовал многоугольник сходимости. Этот многоугольник будет предельным многоугольником, коль скоро ломаная попадет в достаточно малую его окрестность*

Общая структура ломаных итерации, имеющих бесконечно много точек концентрации

Точкой концентрации первого класса будем называть изолированную точку концентрации.

Точкой концентрации р-го класса будем называть предельную точку множества точек концентрации $(p-1)$-го класса.

Пусть множество точек концентрации приводимо. Тогда существует число p_0 такое, что число точек концентрации p_0-го класса конечно. Будем называть такую ломаную *ломаной итерации p_0-го класса.*

Рассмотрим одну из точек концентрации p_0-го класса, допустим $\mathfrak{P}_0$, находящуюся на биссектрисе, с той стороны, с которой находится в любой окрестности бесконечно много точек концентрации (p_0-1)-го класса; исходя от точки $\mathfrak{P}_0$ с отмеченной стороны, можем построить замкнутый ориентированный итерационный многоугольник $\mathfrak{P}_0\, \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{n_1-1}\, \mathfrak{P}_0$, вершины которого суть точки концентрации p_0-го класса.

Рассмотрим далее какую-либо точку концентрации p_0-го класса, не являющуюся вершиной построенного многоугольника; исходя от нее, построим новый итерационный многоугольник $\mathfrak{P}_{n_1}\mathfrak{P}_{n_1+1} \ldots \mathfrak{P}_{n_1+n_2-1}\mathfrak{P}_{n}$ и т. д. Таким образом, все точки концентрации p_0-го класса являются вершинами итерационных многоугольников, число которых конечно.

Итерационный многоугольник, вершины которого суть точки концентрации p-го класса, будем называть *предельным многоугольником p_0-го класса.* Очевидно, *каждый из ориентированных предельных многоугольников класса выше первого есть многоугольник выметания, так как иначе ломаная итерации имела бы лишь конечное число точек концентрации.*

Рассмотрим один из предельных многоугольников p_0-го класса, $p_0 > 1$, обозначим его $\mathfrak{P}'$, с числом вершин n_1. Построим для него замкнутую окрестную полосу Δ'. Внутри любой такой полосы содержится бесконечное начальное множество. Значит, существует по крайней мере одна четная вершина этого многоугольника, допустим $\mathfrak{P}'_k$, в окрестности которой на отрезке биссектрисы γ^*_k внутри Δ содержится бесконечно много точек начального множества. Назовем эту вершину главной вершиной.

Рассмотрим вершину $\mathfrak{P}'_{k'}$ многоугольника $\mathfrak{P}'$, предшествующую вершине $\mathfrak{P}'_k$ (т. е. $k'=k-1$, если $k>0$ и $k'=n_1-1$, если $k=0$), прилегающий к ней отрезок кривой $\gamma^*_{k'}$, находящийся внутри Δ и множество $\mathfrak{A}(\gamma^*_k)$ точек начального множества, находящихся в γ^*_k. Множество вершин ломаной, предшествующих им, находится не на отрезке $\gamma^*_{k'}$, а на каких-нибудь других монотонных отрезках кривой $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(s)}$, ординаты точек которых не выходят за пределы интервала ординат точек отрезка кривой $\gamma^*_{k'}$.

Среди отрезков $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(s)}$ имеется по крайней мере один, обозначим его γ'_k, обладающий следующими свойствами:

1) один из концов отрезка γ'_k, обозначим его P'_k, имеет ординату, равную ординате точки $\mathfrak{P}'_k$;

2) на отрезке γ'_k имеется бесконечное множество вершин ломаной, предшествующих вершинам ломаной, принадлежащим множеству $\mathfrak{A}(\gamma^*_k)$, причем P'_k является предельной точкой этого множества;

3) отрезок γ'_k имеет с отрезком $\gamma^*_{k'}$ не более, чем одну общую точку;

если этой общей точкой является точка $\mathfrak{P}'_{k'}$, то отрезок γ'_k прилегает к точке $\mathfrak{P}'_{k'}$ с иной стороны, чем $\gamma^*_{k'}$.

Ориентированную точку концентрации P'_k, рассматриваемую в связи с отрезком γ'_k, будем называть *точкой возвращения*, принадлежащей вершине $\mathfrak{P}'_k$ предельного многоугольника $\mathfrak{P}'$.

Докажем, что точка возвращения есть точка концентрации не выше (p_0-1)-го класса. Предположим противное, т. е. пусть P' есть точка концентрации p_0-го класса. Тогда P'_k есть ориентированная вершина одного из предельных многоугольников p_0-го класса. Пусть P'_k есть ориентированная вершина предельного многоугольника $\mathfrak{P}$.

Рассмотрим ориентированную вершину P'_k и, отправляясь от нее, начнем обход ориентированного многоугольника $\mathfrak{P}'$. От P'_k мы перейдем к $\mathfrak{P}'_k$ и т. д.; ранее чем притти опять к P'_k, мы встретим вершину $\mathfrak{P}'_{k'}$. Но от вершины $\mathfrak{P}'_{k'}$ мы перейдем к $\mathfrak{P}'_k$, следовательно, многоугольник замкнется без участия вершины P'_k. Это противоречит допущению, что P'_k есть вершина ориентированного предельного многоугольника $\mathfrak{P}'$.

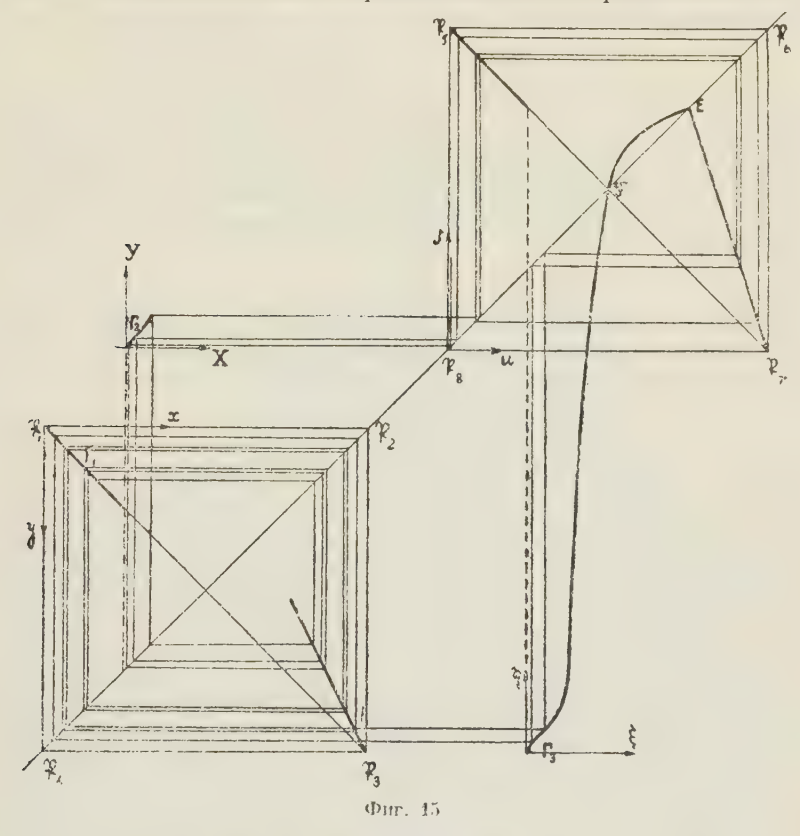
Допустим теперь, что P'_k и $\mathfrak{P}'_{k'}$ суть вершины двух различных ориентированных многоугольников $\mathfrak{P}''$ и $\mathfrak{P}'$, p_0-го класса. Отправляясь от P'_k, начнем обход вдоль $\mathfrak{P}''$; следующей после P'_k вершиной многоугольника $\mathfrak{P}''$ будет $\mathfrak{P}'$. Отправляясь от $\mathfrak{P}'_{k'}$, начнем обход вдоль $\mathfrak{P}'$: следующей после $\mathfrak{P}'_{k'}$ вершиной многоугольника $\mathfrak{P}'$ будет также $\mathfrak{P}'_k$. Таким образом, $\mathfrak{P}'_k$ является общей ориентированной вершиной многоугольников $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$. Но одна и та же ориентированная вершина не может принадлежать двум различным ориентированным замкнутым итерационным многоугольникам: построение ориентированного итерационного многоугольника, начатое от определенной ориентированной вершины, вполне однозначно. Мы опять пришли к противоречию. Этим доказано, что P'_k не может быть точкой концентрации p_0-го класса. Но точек концентрации класса выше, чем p_0, вообще не имеет данная ломаная. Следовательно, P'_k есть точка концентрации не выше (p_0-1)-го класса.

Пример ломаной итерации, имеющей систему предельных многоугольников второго класса. Кривая дана уравнениями (фиг. 15).

$y=4-x$	$0<x<\dfrac{p_2+1}{p_1p_2}$	(ветвь Γ_1)
$y=(x-1)[1+(x-1)^\alpha]+5$	$1<x\leqslant\dfrac{p_2+1}{p_2}$	(ветвь Γ_2)
$y=p_1(4-x)$	$\dfrac{p_2+1}{p_1p_2}\leqslant x<4$	
$y=14-x$	$5<x<\dfrac{p_3+1}{p_2p_3}$	
$y=\dfrac{1}{p_1p_2}(6-x)^\beta\left[p_2+(6-x)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$	$6<x\leqslant 6+\dfrac{1}{p_3}$	(ветвь Γ_3)
$y=p_2(9-x)+5$	$9-\dfrac{1}{p_2}\leqslant x<9$	
	$\alpha=\log_{p_2}p_3,\quad \beta=\log_{p_3}p_1.$	

Здесь p_1, p_2, p_3 — произвольные натуральные числа.

Для остальных значений x кривая может быть произвольной.



Фиг. 15

Введем вспомогательные системы координат xy, XY, $\xi\eta$, как показано на чертеже; тогда уравнения ветвей Γ_1, Γ_2, Γ_3 напишутся так:

$$\text{ветвь } \Gamma_1 \quad y = x \qquad 0 < x \leqslant \frac{p_2+1}{p_1 p_2},$$

$$\text{ветвь } \Gamma_2 \quad Y = X(1 + X^\alpha) \qquad 0 < X \leqslant \frac{1}{p_2},$$

$$\text{ветвь } \Gamma_3 \quad \eta = \frac{1}{p_1 p_2}\xi^\beta\left(1 + \xi^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad 0 < \xi \leqslant \frac{1}{p_3}.$$

Докажем, что при подходящем выборе начальной точки ломаной квадраты $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ и $\mathfrak{P}_5\mathfrak{P}_6\mathfrak{P}_7\mathfrak{P}_8$, которые будем обозначать соответственно $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$, суть предельные квадраты второго класса.

Пусть на ветви Γ_1 имеется вершина ломаной с координатами $x_{k_n} = y_{k_n} = \frac{1}{p_1^n}\left(1 + \frac{1}{p_2^n}\right)$, где n — натуральное число. При дальнейшем построении ломаная образует спираль, удаляющуюся от квадрата $\mathfrak{P}_1$, причем после каждого оборота абсцисса вершины ломаной на ветви Γ

увеличивается в p_1 раз. Таким образом, на ветви Г образуется последовательность вершин $M_{k_n}+4\nu$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1$) с координатами

$$x_{k_n+4\nu}=y_{k_n+4\nu}=\frac{p_1^\nu}{p_1^n}\left(1+\frac{1}{p_2^n}\right) \quad \nu=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Вершина M_{k_n+4n} будет уже на ветви Γ_2 с абсциссой $x_n=\frac{1}{p_2^n}$, т. е. ломаная выйдет за пределы квадрата $\mathfrak{P}'$. Следующая вершина M_{k_n+4n+1} ломаной будет в окрестности вершины $\mathfrak{P}_3$ квадрата $\mathfrak{P}''$ и будет иметь координаты

$$u_{n0}=v_{n0}=\frac{1}{p_2^n}\left(1+\frac{1}{p_3^n}\right).$$

Далее ломаная образует спираль внутри квадрата $\mathfrak{P}''$, причем на биссектрисе вблизи $\mathfrak{P}_3$ будет последовательность вершин $M_{k_n+4n+4\nu+1}$ ($\nu=0, 1, \ldots, n-1$) с координатами

$$u_{n\nu}=v_{n\nu}=\frac{p_2^\nu}{p_2^n}\left(1+\frac{1}{p_3^n}\right) \quad \nu=0, 1, \ldots, n-1.$$

Вершина M_{k_n+8n+1} будет последняя вершина этой спирали внутри квадрата $\mathfrak{P}''$; вершина M_{k_n+8n+2} будет уже на ветви Γ_3, ее координаты

$$\xi_n=\frac{1}{p_3^n}; \quad \eta_n=\frac{1}{p_1^{n+1}}\left(1+\frac{1}{p_2^{n+1}}\right).$$

Вершина M_{k_n+8n+3} будет на биссектрисе вблизи точки $\mathfrak{P}_n$, а M_{k_n+8n+4} — на ветви Γ_1; положим $k_n+8n+4=k_{n+1}$. Координаты этой точки будут

$$x_{k_{n+1}}=y_{k_{n+1}}=\frac{1}{p_1^{n+1}}\left(1+\frac{1}{p_2^{n+1}}\right).$$

Таким образом, если начать построение ломаной, например, от точки с абсциссой $\frac{p_2+1}{p_1p_2}$ (на кривой Γ_1), то ломаная будет образовывать бесконечно много циклов таких, какой был описан.

На ветви Γ_1 будет множество вершин с абсциссами

$$\frac{p_1^\nu}{p_1^n}\left(1+\frac{1}{p_2^n}\right) \quad \begin{array}{l}\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1\\ n=1, 2, \ldots\end{array}$$

Таким образом, на ветви Γ_1 точки с абсциссами $\frac{1}{p_1^n}$ ($n=1, 2, \ldots$) будут точками концентрации первого класса. Точка $\mathfrak{P}_1$ является поэтому точкой концентрации второго класса. А следовательно, вершины $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ квадрата $\mathfrak{P}'$ также суть точки концентрации второго класса.

Вблизи вершины $\mathfrak{P}_3$ квадрата $\mathfrak{P}''$ на биссектрисе лежат вершины ломаной с координатами

$$u_{n\nu}=v_{n\nu}=\frac{p_3^\nu}{p_2^n}\left(1+\frac{1}{p_2^n}\right) \quad \begin{array}{l}\nu=0, 1, 2, \ldots, n\\ n=1, 2, 3, \ldots,\end{array}$$

поэтому точки биссектрисы с координатами

$$u_n = v_n = \frac{1}{p_2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

суть точки концентрации первого класса. Значит, вершина $\mathfrak{P}_3$, а вместе с ней $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$, $\mathfrak{P}_7$ являются точками концентрации второго класса.

Точки $X = Y = 0$ и $\xi = \eta = 0$ суть точки возвращения, принадлежащие соответственно квадратам $\mathfrak{P}''$ и $\mathfrak{P}'$.

Поступило
17 III 1941

S. POULKINE. SUR L'ITÉRATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

RÉSUMÉ

Soit donnée une courbe $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction univalente définie pour toutes les valeurs de x, continue partout sauf peut-être pour un nombre fini de points de discontinuité de première espèce et n'ayant qu'une quantité finie de points d'extremum. La courbe est supposée d'avoir une tangente qui varie d'une façon continue avec x sauf peut-être en un nombre fini de points angulaires et de points d'arrêt et n'avoir qu'un nombre fini de points d'inflexion. La ligne polygonale de l'itération est construite de la façon suivante: on prend sur l'axe des x un point arbitraire x_1 et l'on mène par ce point un segment de droite parallèle à l'axe des y jusqu'à l'intersection avec la courbe dans le point M_1; par le point M_1 on mène ensuite un segment de droite parallèle à l'axe des x jusqu'à l'intersection avec la droite $y = x$ dans le point M_2; par M_2 on mène ensuite un segment de droite parallèle à l'axe des y jusqu'à l'intersection avec la courbe dans le point M_3 et ainsi de suite. On obtient de cette manière une ligne polygonale infinie $M_1M_2M_3$... Les sommets de cette ligne polygonale situés sur la courbe seront nommés les *points impairs* et les sommets situés sur la droite $y = x$ seront nommés *les points pairs*. La ligne polygonale ainsi obtenue correspond à l'itération de la fonction $y = \varphi(x)$ avec la valeur initiale $x = x_1$.

Si la ligne polygonale de l'itération ne peut pas être enfermée dans aucune région bornée, elle est ou bien un escalier qui s'éloigne indéfiniment ou encore une spirale s'élargissant indéfiniment. Dans le cas contraire, où la ligne polygonale de l'itération est contenue dans une région bornée, l'ensemble de ses sommets a au moins un point limite. Un point limite de l'ensemble des sommets de la ligne polygonale de l'itération est nommé *le point de condensation* de la ligne polygonale de l'itération. Si tout voisinage de ce point contient et des points pairs et des points impairs, je le nomme le point de concentration de première espèce. S'il existe, au contraire, un voisinage de ce point ne contenant que des points pairs ou que des points impairs, je le nomme le point de concentration de seconde espèce.

Il existe des lignes polygonales de l'itération de types suivants:

1. La ligne polygonale de l'itération n'a qu'un seul point de concentration. Dans ce cas la ligne polygonale de l'itération est ou bien un escalier qui converge vers ce point d'une manière montante, ou une spirale convergeant vers lui d'une manière monotone; ce point unique de concentration est de première espèce.

2. La ligne polygonale de l'itération a un nombre fini supérieur à un de points de concentration. Dans ce cas les points de concentration sont ou bien des sommets d'un polygone dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonées, ou enfin ils sont des sommets de plusieurs polygones de cette espèce, formant un systéme tel, que tous les polygones de ce système peuvent être parcourus d'un seul mouvement continu (fig. 13). Je nomme ces polygones les polygones limites. Le nombre de polygones limites ne peut dépasser un que quand parmi les points de concentration il y en a ceux de la discontinuité de la courbe. La convergence de la ligne polygonale de l'itération vers les polygones limites est monotone.

3. La ligne polygonale de l'itération a une infinité de points de concentration, l'ensemble des sommets de la ligne polygonale étant tel, que son ensemble dérivé de l'ordre p contient un nombre fini de points. Ces points sont des sommets des polygones dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnés. Je les nomme les polygones limites de classe p. La convergence de la ligne polygonale vers les polygones limites de classe supérieure à un n'est pas monotone: la ligne polygonale, après être entrée dans un certain petit voisinage d'un tel polygone, le quitte ensuite et passe dans un petit voisinage d'un autre polygone, qu'elle quitte ensuite aussi; après un nombre fini de pas la ligne polygonale entre de nouveau dans le voisinage de premier polygone. Dans le cas particulier où le polygone limite dégénère en un point de concentration, nous obtenons au lieu d'un polygone limite un point de concentration de première espèce qui est au point limite de l'ensemble des points de concentration de seconde espèce.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 109–113 Série mathématique

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Б. Н. ДЕЛОНЕ и Д. К. ФАДДЕЕВ. Теория иррациональностей третьей степени, Труды Математического института им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР, XI, Изд. Академии Наук СССР, 1940, 340 стр.

Теория квадратичного алгебраического поля закончена в классических трудах Лагранжа и Гаусса. Следующий за ней случай кубического поля представляет особый интерес для современной теории чисел по двум причинам: с одной стороны, все вычисления с кубическими числами (определение базиса, разложение чисел на простые идеалы и т. д.) могут быть произведены на самом деле, с другой стороны, тут выступают особенности алгебраической и арифметической структуры, характерные для любого алгебраического поля, которые оставались незаметными в простейшем случае квадратичного поля. Несмотря на большое число имевшихся по кубическому полю работ, до сих пор не было монографии, которая объединяла бы эти работы и давала направление для дальнейших исследований.

Рецензируемая книга восполняет этот пробел. Значительную часть ее занимает изложение многолетних глубоких изысканий авторов: Б. Н. Делоне и его ученика Д. К. Фаддеева; работы других ученых — Вороного, Туэ и Зигеля — также представлены в заново переработанном и усовершенствованном виде.

Основная идея, пронизывающая все изложение, — это систематическое применение геометрии как к выводу теоретических фактов, так и к получению удобных алгорифмов для вычислений. Содержание книги охватывает почти все разработанные доныне вопросы кубического поля: вычисление базиса, единиц, табуляризацию кубических полей, приближение к кубическим иррациональностям при помощи рациональных дробей и решение неопределенных уравнений третьей степени. Остался в стороне лишь небольшой цикл работ, так или иначе связанных с теорией полей классов [Klassenkörper]. Разберем содержание книги по главам.

В первой главе дается общая теория алгебраических полей n-ой степени в геометрическом изложении. Число ζ называется алгебраическим, если оно удовлетворяет уравнению

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами a_i; если a_i суть целые рациональные, то ζ называется целым алгебраическим. Множество чисел вида

$$\omega = q_0 + q_1\zeta + \ldots + q_{n-1}\zeta^{n-1}$$

с произвольными рациональными q_i называется алгебраическим полем $R(\zeta)$. Если уравнение (1) имеет σ вещественных и τ пар комплексно-сопряженных корней $\zeta_1, \ldots, \zeta_\sigma, \zeta_1' + i\zeta_1'', \ldots, \zeta_\tau' + i\zeta_\tau''$, то его можно интерпретировать в виде точки с координатами $(\zeta_1, \ldots, \zeta_\sigma, \zeta_1', \zeta_1'', \ldots, \zeta_\tau', \zeta_\tau'')$ в n-мерном вещественном пространстве $R_{n,\tau}$. Если построить точки, соответствующие всем целым числам поля $R(\zeta)$, то получится р е ш е т к а, т. е. множество точек, лежащих в вершинах одинаковых и одинаково расположенных параллелепипедов, заполняющих все пространство $R_{n,\tau}$. Изучение этой решетки и составляет основу геометрического изложения всей теории. Отдель-

ные пункты такого изложения (для частных случаев $n=2$, $n=3$) были намечены в работах Клейна, Минковского и Фуртвенглера, но в полном виде это изложение проведено в настоящей книге впервые. Отметим некоторые его особенности.

Классики теории идеалов предполагали основное уравнение (1) неприводимым, т. е. что левая его часть не разлагается на два множителя с рациональными коэффициентами. В настоящее время представляется полезным рассматривать и приводимые уравнения; такие п р и в о д и м ы е решетки систематически изучаются в первой главе наряду с неприводимыми. Далее, выделяется простотой вывод асимптотической формулы для числа всех целых алгебраических точек ζ пространства $R_{n,\tau}$, содержащихся в шаре радиуса r, описанном около начала координат. Здесь имеются в виду не точки одного какого-либо поля, но точки всех полей (т. е. рассматриваются все уравнения (1) с фиксированными n, τ и любыми целыми a_i); эти точки образуют в $R_{n,\tau}$ дискретную систему (не решетку), сгущающуюся по мере удаления от начала координат. Для числа $N_{r,n,\tau}$ точек ζ в шаре радиуса r получается формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_{r,n,\tau}}{\nu_{n,\tau}\cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 1, \tag{2}$$

где $\nu_{n,\tau}$ — постоянная, зависящая только от n и τ. Вывод формулы (2) основан на остроумном применении преобразований Виета, т. е. на переходе из пространства корней $R_{n,\tau}$ в пространство A коэффициентов $(a_1, \ldots, a_n)$ уравнения (1). Интересующим нас точкам ζ отвечают в пространстве A точки с обыкновенными целыми координатами; количество же этих последних точек в каком-нибудь теле, бесконечно расширяющемся во всех направлениях, асимптотически равно объему этого тела. После этого быстро получается формула (2).

В первой же главе находим и классическую теорию Галуа, переизложенную в геометрических терминах.

Глава вторая посвящена первому циклу вычислений в кубическом поле, до определения базиса и разложения на простые идеалы включительно. Для кубического поля $n=3$ и основное уравнение (1) имеет вид

$$\rho^3 + a_1\rho^2 + a_2\rho + a_3 = 0, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3 целые рациональные; всякое число поля имеет вид

$$q_0 + q_1\rho + q_2\rho^2 \tag{4}$$

с рациональными q. Всякую рациональную комбинацию чисел вида (4) опять можно представить в этом виде; такие преобразования, само собой разумеется, приходится делать в большом количестве при всяком вычислении в кубическом поле. Авторы не забывают самых мелких деталей, могущих сберечь время и труд вычислителя. Все указания иллюстрируются численными примерами. Все целые числа поля $R(\rho)$ могут быть получены сложением и вычитанием из трех чисел ω_0, ω_1, ω_2, образующих так называемый базис поля $R(\rho)$. В магистерской диссертации Г. Ф. Вороного доказывается, что за базис можно взять числа

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \frac{t+\rho}{\delta}, \quad \omega_2 = \frac{(a_2 - a_1 t + t^2) + (a_1 - t)\rho + \rho^2}{\delta^2\varepsilon} \tag{5}$$

с надлежаще определенными целыми рациональными t, δ, ε. При изложении этой теории Вороного используется уже давно замеченное Б. Н. Делоне свойство базиса (5), состоящее в том, что произведение $\omega_1\,\omega_2$ равно целому рациональному числу. Это замечание вскрывает самую сущность базиса Вороного и значительно упрощает доказательство. В конце главы трактуется вопрос о разложении простых чисел на простые идеалы в кубическом поле при помощи функциональных сравнений (по Золотареву и Дедекинду).

Глава третья посвящена более серьезному вычислительному вопросу, именно табуляризации кубических полей. Пусть, например, $n=3$, $\tau=0$ и целые числа кубического поля изображены, как выше, точками решетки в обыкновенном трехмерном

пространстве $R_{3,0}$. Квадрат объема основного параллелепипеда этой решетки есть целое число d, называемое дискриминантом поля; от него существенно зависят свойства поля. Вопрос табуляризации состоит в вычислении таблицы всех кубических полей, дискриминанты которых не превышают данного предела. В начале главы излагается геометрический метод, предложенный для этой цели Б. Н. Делоне в 1926 г. Пусть x, y, z корни уравнения (3), так что (x, y, z) будет соответствующая точка в R_{30}. Обозначим через W систему точек, соответствующих всем уравнениям (3) с целыми a_1, a_2, a_3. Вопрос состоит в том, чтобы выделить из W по одному представителю для всех полей, для которых $d < \mathfrak{L}$ ($\mathfrak{L}$ — данное число); для этого нужно ограничить коэффициенты a_1, a_2, a_3. Из формул

$$x + y + z = -a_1 \tag{6}$$
$$xy + xz + yz = a_2 \tag{7}$$
$$xyz = -a_3 \tag{8}$$

вытекает, что точки W лежат в пересечении трех дискретных семейств поверхностей: плоскостей (6), гиперболоидов (7) и поверхностей 3-го порядка (8). Если (x, y, z) точка W, то при любом целом k точке $(x + k, y + k, z + k)$, очевидно, также принадлежит W: так как a_1 меняется при этом на $3k$, то надлежащим выбором k можно сделать a_1 равным -1, 0 или $+1$. Иначе говоря, каждую точку W можно ортогонально спроектировать на одну из плоскостей $x+y+z = 0, \pm 1$, и опять получится точка W. При этом точки W, лежащие на плоскостях $x+y+z = \pm 1$ симметричны относительно начала, так что в конечном счете достаточно рассматривать только точки W на двух плоскостях $x + y + z = 0, 1$. Ограничение для второго коэффициента a_2 получается применением классической теоремы Лагранжа о минимуме положительной бинарной квадратичной формы (или, что то же самое, теоремы о плотнейшем расположении кругов на плоскости). Так как корни уравнения (3) вещественны, то дискриминант $\mathfrak{D}$ его больше нуля. Неравенство

$$27\,\mathfrak{D} = 4\,(a_1^2 - 3a_2)^3 - (27a_3 - 9a_1a_2 + 2a_1^3)^2 > 0$$

позволяет ограничить a_3, после того как ограничены a_1 и a_2. Далее нужно выписать все уравнения (3), коэффициенты которых лежат в найденных пределах, исключить приводимые и из всех уравнений, дающих одно и то же поле, выбрать одно; для всех этих действий даются удобные приемы. В конце главы помещен метод, разработанный Д. К. Фаддеевым, для табуляризации полей четвертой степени по квадратичным и кубическим, вместе с полной классификацией этих полей.

В главе четвертой трактуется важнейший для кубического поля вопрос — вычисление единиц. Целое алгебраическое число называется **единицей**, если оно удовлетворяет неприводимому уравнению (1) со свободным членом $a_n = \pm 1$. Нахождение всех единиц имеет фундаментальное значение для теории алгебраических полей. Для квадратичного поля вопрос приводится к известному уравнению Пелля и решается с помощью непрерывных дробей. Для кубического поля ($n=3$), согласно общей теореме Дирихле, при $\tau = 1$ все единицы имеют вид $\pm\varepsilon^k$ $(k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$, при $\tau = 0$ — имеют вид $\pm\varepsilon_1^{k_1}\varepsilon_2^{k_2}$ $(k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; таким образом, все единицы будут известны, если вычислить **фундаментальную** единицу ε в случае $\tau = 1$ и пару фундаментальных единиц $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в случае $\tau = 0$. Из всех способов вычисления кубических единиц самым удобным и теоретически глубоким является алгорифм, предложенный Г. Ф. Вороным в докторской диссертации «Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей» (1896).

Алгорифм Вороного и излагается в четвертой главе в геометрической обработке Б. Н. Делоне ($\tau = 1$) и Д. К. Фаддеева ($\tau = 0$). В основе его лежит понятие об **относительном минимуме** решетки. Пусть (при $\tau = 1$) S есть решетка целых чисел данного кубического поля в пространстве $R_{3,1}$; координаты пространства обозначим через x, y, z, так что $z, x + iy, x - iy$ будут три корня уравнения вида (3). Решетка S симметрична относительно точки O (начала координат), так что достаточно рассматривать точки S, лежащие сверху плоскости $z = 0$ (на которой, кроме O, нет

других точек S). Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ решетки S называется относительным минимумом, если прямой круговой цилиндр, определяемый условиями

$$x^2 + y^2 \leqslant x_0^2 + y_0^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant z_0, \tag{9}$$

не содержит внутри и на границе других точек S, кроме O и M. Пусть M такой минимум; будем постепенно увеличивать радиус круговой поверхности цилиндра (9), не меняя его высоты. Точка M_1 решетки S, на которую впервые наткнется эта поверхность, будет, очевидно, также относительным минимумом, который можно назвать смежным с M вниз. Аналогично определяется смежный с M вверх минимум M_{-1}; таким образом, все минимумы располагаются в бесконечный ряд

$$\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M, M_1, M_2, \ldots, \tag{10}$$

причем каждые два соседних члена суть смежные минимумы. Точки $M_1, M_2, \ldots$ удаляются в бесконечность, приближаясь неограниченно к плоскости $z = 0$, а точки $M_{-1}, M_{-2}, \ldots$ — к оси z. В структуре расположения минимумов (10) обнаруживается затем периодичность; вычисление полного периода и доставляет искомую фундаментальную единицу данного поля. Таким образом, в методе Вороного важно дать удобные средства для вычисления: 1) одного минимума M и 2) соседнего минимума M_{k+1} по известному M_k. Основная теорема, доказанная Г. Ф. Вороным для этой цели, очень удачно интерпретирована Б. Н. Делоне при помощи проектирования решетки S на плоскость $z = 0$ параллельно прямой OM, где M — данный минимум. Все изложение четвертой главы если не исключает вовсе, то значительно упрощает изучение трудной диссертации Г. Ф. Вороного.

Глава пятая начинается с изложения известной теоремы Туэ: если ρ — кубическая иррациональность и A — любая константа, то существует лишь конечное число рациональных дробей $\frac{y}{x}$, для которых

$$\left|\rho - \frac{y}{x}\right| < \frac{A}{x^{5/3}}.$$

Из этой теоремы вытекает, что неопределенное уравнение

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = M, \tag{11}$$

где слева стоит неприводимая кубическая форма с целыми коэффициентами, а справа — данное число, имеет лишь конечное число целых решений x, y. Что касается оценки числа возможных решений, то ее достаточно дать для случая $M = 1$, так как еще Лагранж доказал, что решение уравнения (11) приводится к решению нескольких уравнений того же типа с $M = 1$. Такая оценка для форм отрицательного дискриминанта была дана Б. Н. Делоне в 1922 г., причем оказалось, что уравнение

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1 \tag{12}$$

имеет не более пяти решений, и это число 5 нельзя уменьшить. Эта работа Б. Н. Делоне излагается в шестой главе настоящей книги. Для форм положительного дискриминанта оценка была дана в 1922 г. К. Зигелем; изложением ее и заканчивается пятая глава. В результате коренной переработки метода Зигеля, сделанной Д. К. Фаддеевым, оказалось возможным не только изгнать специальные средства из анализа, которыми пользуется Зигель, но и улучшить результат (получается 15 возможных решений уравнений (12), вместо 18 у Зигеля).

Последняя, шестая глава книги содержит исследования Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева о решении уравнений вида (12) в целых и дробных числах x, y. В случае, когда левая часть уравнения (12) имеет некоторую социальную форму, решение его можно довести до конца, т. е. дать удобные практически и весьма совершенные теоретически критерии разрешимости. Пусть дано, например, уравнение

$$x^3 + ay^3 = 1, \tag{13}$$

причем a целое число, не равное точному кубу. Рассмотрим решетку с базисом $\{1, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2},\}$ и найдем ее фундаментальную единицу $\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt[3]{a} + z_0\sqrt[3]{a^2}$ (предпо-

лагаем $\varepsilon > 0$). В уравнении вида (13), которому удовлетворяет ε, должно быть $a_3 = 1$, что дает

$$x_0^3 + a^2y_0^3 + a^3z_0^3 - 3ax_0y_0z_0 = 1.$$

Критерий разрешимости уравнения (13) (Б. Н. Делоне, 1922) можно формулировать так: при $z_0 \neq 0$ уравнение (13) не имеет решений, при $z_0 = 0$ имеет только одно решение $x = x_0$, $y = y_0$ [тривиальное решение $x = 1$, $y = 0$ не принимаем во внимание]. Этот критерий позволяет судить и о величине чисел x_0, y_0, удовлетворяющих уравнению (13), потому что классическая теорема Дирихле устанавливающая существование фундаментальной единицы ε, дает вполне определенные пределы для ее коэффициентов x_0, y_0, z_0. Заметим, что метод Туэ, о котором говорилось выше, не позволяет ничего сказать о величине решений x, y уравнения (11). Подобный же критерий дан Д. К. Фаддеевым для широкого класса уравнений 3-й и 4-й степени. В конце главы излагаются исследования Д. К. Фаддеева о решении уравнения (13) в дробных числах, что приводится к решению в целых числах однородного уравнения $x^3 + y^3 = az^3$.

Книга содержит много полезных таблиц (большинство которых вычислено авторами и их учениками) и множество превосходно выполненных чертежей. Изложение отличается наглядностью и простотой, так что доступно широким кругам математиков. Единственным недостатком книги является небрежно составленный литературный указатель (попадаются искаженные заглавия статей).

В общем, книга может считаться украшением советской математической литературы. С внешней стороны книга оформлена настолько хорошо, что не уступает лучшим заграничным изданиям этого рода.

Б. А. Венков

Редактор издательства Б. И. Сегал

Подписано к печати 10/VI 1942 г. Л55749.
Объем $7^1/_8$ п. л. Уч.-издат. л. 8,5. Тираж 640.
Цена 12 руб. Заказ 399.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный п., 9.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 115—134 Série mathématique

Л. С. ПОНТРЯГИН

О НУЛЯХ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $h(z, t)$ — полином двух переменных с действительными или комплексными коэффициентами. В работе решается вопрос о том, при каких условиях все нули функции $h(z, e^z)$ имеют отрицательные действительные части.

В теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играет вопрос о поведении корней векового уравнения $P(z)=0$. Если данному положению равновесия p системы уравнений соответствует вековой полином $P(z)$, то для устойчивости этого положения равновесия достаточно, чтобы все корни полинома $P(z)$ имели отрицательные действительные части, и необходимо, чтобы у полинома $P(z)$ не было ни одного корня с положительной действительной частью. Вопрос о такого рода поведении корней полинома $P(z)$ играет поэтому существенную роль, и он был решен Гурвицем. В применении к уравнениям в частных производных такой же вопрос возникает иногда, но уже не для полинома, а для трансцендентной функции. Решению этого вопроса для трансцендентной функции вида $H(z)=h(z, e^z)$, где $h(z, t)$ — полином, и посвящена настоящая работа. Точнее говоря, она приводит этот вопрос к решению некоторого вопроса об элементарных трансцендентных функциях, но уже относительно их поведения в действительной области, дальше же этот вопрос может быть вполне эффективно решен при помощи способа Штурма.

Обозначим через r степень полинома $h(z, t)$ относительно z и через s степень полинома $h(z, t)$ относительно t. Член вида az^rt^s будем называть главным. В случае, если полином $h(z, t)$ не имеет главного члена, функция $H(z)$ непременно имеет бесчисленное множество нулей с произвольно большими положительными действительными частями. Если полином $h(z, t)$ имеет главный член, то для решения поставленного вопроса рассматривается поведение функции $H(z)$ на мнимой оси, т. е. при $z=yi$, где y — действительное переменное. Функция $H(yi)$ распадается тогда на свою действительную и мнимую части:

$$H(yi)=F(y)+iG(y),$$

где

$$F(y)=f(y, \cos y, \sin y), \qquad G(y)=g(y, \cos y, \sin y),$$

причем $f(y, u, v)$ и $g(y, u, v)$ — полиномы. Оказывается, что для того, чтобы функция $H(z)$ имела действительные части всех корней отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы корни функций $F(y)$ и $G(y)$ были все действительными и перемежались, а также, чтобы хоть при одном значении y имело место неравенство $G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0$. Вопрос о том, будут ли все корни функции вида $F(z)$ действительными, решается следующим критерием: для того, чтобы все корни функции $F(z)$ были действительными, необходимо и достаточно, чтобы на интервале $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$ функция $F(y)$ имела, начиная с достаточно большого k, ровно $4sk+r$ корней; здесь имеются в виду уже действительные корни. Последний критерий вполне аналогичен соответственному критерию для полинома, именно, наличие достаточно большого числа действительных корней обеспечивает отсутствие комплексных.

Настоящая работа является развитием работы Н. Г. Чеботарева. В своем докладе на заседании Московского математического общества зимой 1941/42 г. Н. Г. Чеботарев изложил решение того же вопроса, который решается в предлагаемой работе, для случая, когда полином $h(z, t)$ линеен относительно t. Впрочем, и для этого случая Н. Г. Чеботарев дал лишь достаточные условия того, чтобы функция $H(z)$ имела лишь нули с действительными отрицательными частями, необходимость же этих условий не была им доказана. Возможность использования метода Штурма для доведения решения задачи до конца вполне эффективным способом была отмечена Н. Г. Чеботаревым. Все указанные результаты Н. Г. Чеботарева публикуются в журнале «Доклады Академии Наук».

§ 1. Нули функции $h(z, e^z)$ при отсутствии главного члена

Пусть $h(z, t)$ — полином от двух переменных z и t с постоянными, действительными или комплексными коэффициентами

$$h(z, t) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m t^n. \tag{1}$$

Главным членом полинома (1) будем называть такой член $a_{rs}z^r t^s$, что $a_{rs} \neq 0$ и показатели r и s достигают одновременно своих максимумов, т. е. для всякого другого члена $a_{mn}z^m t^n$ из (1) при $a_{mn} \neq 0$ имеет место или $r > m$, $s > n$, или $r = m$, $s > n$, или $r > m$, $s = n$. Очевидно, что не всякий полином имеет главный член.

ТЕОРЕМА 1. *При отсутствии главного члена у полинома* (1) *функция*

$$H(z) = h(z, e^z) \tag{2}$$

непременно имеет бесконечное множество нулей с произвольно большими положительными действительными частями.

Доказательство. Рассмотрим простейший полином $t - z$ без главного члена и на его примере выясним тип решения, которое мы

будем искать. Мы имеем уравнение $e^z - z = 0$. Полагая $z = x + iy$, получаем два уравнения

$$e^x \cos y = x, \qquad e^x \sin y = y. \tag{3}$$

Будем искать приближенные решения полученных двух уравнений в предположении, что x и y оба положительны и весьма велики. В этом предположении из уравнений (3) следует, что $\cos y = xe^{-x}$ и, следовательно, приближенное значение y есть $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Из уравнений (3) далее приближенно следует $x = ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, решение нужно искать в форме $z = ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \zeta$, где ζ — малое неизвестное, стремящееся к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$.

По аналогии с полученным решением, решение для общего уравнения $H(z) = 0$ без главного члена будем искать в форме

$$z = \alpha\, ln\, 2k\pi + 2k\pi i + ln\, \theta + \zeta. \tag{4}$$

Здесь α — положительное рациональное число, которое будет подобрано в зависимости от полинома (1), $\theta \neq 0$ — комплексное число, которое также будет подобрано в зависимости от полинома (1); наконец, ζ — неизвестное, стремящееся к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$. Из (4) мы имеем

$$e^z = (2k\pi)^\alpha \theta e^\zeta, \quad z = i2k\pi\,(1 + \delta_1(\zeta)), \tag{5}$$

где $\delta_1(\zeta)$ — аналитическая функция переменного ζ, равномерно стремящаяся к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$. Подставляя полученные значения в $H(z)$, имеем:

$$H(z) = \sum_{m,n} (2k\pi)^{m+\alpha n} a_{mn} i^m \theta^n e^{n\zeta} (1 + \delta_1(\zeta))^m. \tag{6}$$

Таким образом, мы разложили функцию $H(z)$ в конечную сумму по дробным степеням величины $2k\pi$. Выберем в этом разложении главные члены, т. е. такие, в которых показатель $m + \alpha n$ достигает своего возможного максимума β при $a_{mn} \neq 0$. Тогда выражение (6) записывается так:

$$H(z) = \sum_n (2k\pi)^\beta a_{mn} i^m \theta^n e^{n\zeta} + (2k\pi)^\beta \delta_2(\zeta) = \sum_n (2k\pi)^\beta b_n \theta^n e^{n\zeta} + (2k\pi)^\beta \delta_2(\zeta).$$

Здесь суммирование ведется по тем значениям n, для которых $m + \alpha n = \beta$ и $a_{mn} \neq 0$. Суммировать по m нет надобности, так как соотношением $m + \alpha n = \beta$ число m однозначно определяется числом n. Величина $\delta_2(\zeta)$ является аналитической функцией переменного ζ, равномерно сходящейся к нулю в круге $|\zeta| \leqslant 1$ при $k \to \infty$.

В силу самого определения числа β существует хоть одно такое значение n, для которого $m + \alpha n = \beta$, и одновременно $a_{mn} \neq 0$. Ниже будет

доказано, что при отсутствии главного члена в полиноме (1) и при надлежащем выборе α найдутся по меньшей мере два различных значения n, для которых указанные условия будут выполнены. В этом предположении уравнение

$$\sum_n b_n \theta^n = 0 \tag{7}$$

относительно неизвестного θ будет иметь хоть одно отличное от нуля решение. Отныне мы и будем считать это решение значением θ. Итак, соотношение (7) уже не уравнение, а равенство, выполненное для выбранного значения θ. Вместо уравнения $H(z)=0$ рассмотрим эквивалентное ему уравнение

$$\sum_n b_n \theta^n e^{n\zeta} + \delta_2(\zeta) = 0. \tag{8}$$

Левая часть этого уравнения при $k \to \infty$ равномерно сходится к функции $\sum\limits_n b_n \theta^n e^{n\zeta}$, но уравнение $\sum\limits_n b_n \theta^n e^{n\zeta} = 0$ имеет очевидное решение $\zeta = 0$ [см. (7)]. Ввиду равномерной сходимости и уравнение (8) при достаточно большом k имеет решение ζ_k, притом стремящееся к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$. Таким образом, уравнение $H(z)=0$ имеет решение

$$z = ln 2k\pi + 2k\pi i + ln\,\theta + \zeta_k, \tag{9}$$

начиная с достаточно большого k, причем ζ_k стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$. Ввиду того что α и θ не зависят от k, решение это очевидным образом имеет положительную действительную часть при достаточно большом k.

Теперь остается выбрать такое положительное рациональное число α, чтобы существовало по крайней мере два значения для n, при которых $m + \alpha n = \beta$ и $a_{mn} \neq 0$, при этом мы будем исходить из предположения, что полином (1) не имеет главного члена.

Пусть s — максимальное значение n, для которого $a_{mn} \neq 0$, r — максимальное значение m, при котором $a_{ms} \neq 0$. По предположению об отсутствии главного члена в полиноме (1) существуют тогда такие значения p и q для m и n, что $p > r$, $q < s$ и $a_{pq} \neq 0$. Заменим теперь в полиноме (1) t через z^α, где $\alpha > 0$, и рассмотрим полученное выражение

$$\sum_{m,n} a_{mn} z^{m+\alpha n}, \tag{10}$$

расположенное по положительным степеням переменного z. Главным членом этого разложения будем называть тот, который будет иметь максимальную в нем степень $m + \alpha n$ для z при коэффициенте $a_{mn} \neq 0$. Когда α очень велико, главным членом разложения (10) очевидно является $a_{rs} z^{r+\alpha s}$. Когда α достаточно близко к нулю, этот член не

может остаться главным, так как показатель степени у $a_{pq}z^{p+\alpha q}$ очевидно больше, ибо $p > r$. Таким образом, в процессе непрерывного изменения α от $+\infty$ к 0 наступит такой момент, когда появится по меньшей мере два главных члена в разложении (10), это значение α мы и обозначим через α. Очевидно, что α рационально, так как оно определяется некоторым целочисленным уравнением $r+\alpha s = m+\alpha n$.

Итак, утверждение теоремы I доказано.

§ 2. Нули функции $f(z, \cos z, \sin z)$

Пусть $f(z, u, v)$ — полином с действительными постоянными коэффициентами относительно переменных z, u, v. Тогда

$$f(z, \cos z, \sin z) = F(z) \tag{11}$$

является целой трансцендентной функцией аргумента z и принимает действительные значения при действительных значениях аргумента. Здесь будет дано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $F(z)$ имела лишь действительные нули и притом в терминах поведения функции $F(z)$ в действительной области.

Полином $f(z, u, v)$ представим в форме:

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v). \tag{12}$$

Через $\varphi_m^{(n)}$ здесь обозначен однородный по u и v полином степени n. Так как в дальнейшем предполагается положить $u = \cos z$, $v = \sin z$, то без ограничения общности мы можем считать, что полином $\varphi_m^{(n)}(u, v)$ не делится на u^2+v^2, иначе говоря, выполнено условие

$$\varphi_m^{(n)}(1, \pm i) \neq 0 \tag{13}$$

для всех входящих в разложение (12) полиномов.

Главным членом полинома (12) будем называть тот член $z^r\varphi_r^{(s)}(u, v)$ разложения, в котором показатели r и s одновременно достигают своих максимумов, т. е. для всякого другого члена $z^m\varphi_m^{(n)}(u, v)$, входящего в разложение (12), выполнено условие: или $r > m$, $s > n$, или $r = m$, $s > n$, или $r > m$, $s = n$. Очевидно, что не во всяком полиноме (12) главный член существует.

С помощью результатов § 1 доказывается

ТЕОРЕМА II. *Если полином* (12) *не имеет главного члена, то функция* $F(z)$ [см. (11)] *непременно имеет бесконечное число недействительных нулей.*

Для формулировки решения в случае наличия главного члена у по-

линома (12) выделим в нем коэффициент при старшей степени z:

$$f(z, u, v) = z^r \varphi_*^{(s)}(u, v) + \sum_{m<r, n\leqslant s} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v). \qquad (14)$$

Здесь $\varphi_*^{(s)}$ уже неоднородный полином по u, v степени s:

$$\varphi_*^{(s)}(u, v) = \sum_{n\leqslant s} \varphi_r^{(n)}(u, v). \qquad (15)$$

Функция $\Phi_*^{(s)}(z) = \varphi_*^{(s)}(\cos z, \sin z)$ очевидно периодическая с периодом 2π и, как будет показано ниже, имеет на полосе $a \leqslant x < 2\pi + a$ $(z = x + iy)$ лишь конечное число нулей, именно, $2s$. Ввиду этого существует бесчисленное множество таких значений $\alpha = \varepsilon$, что

$$\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) \neq 0$$

при любом y. В большинстве случаев за ε можно будет принять нуль.

ТЕОРЕМА III. *Пусть $f(z, u, v)$ — полином с главным членом $z^r\varphi_r^{(s)}(u, v)$. Если ε таково, что $\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy)$ не обращается в нуль ни при каком действительном y, то на полосе $-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$ $(z = x + iy)$ функция $F(z)$ будет, начиная с некоторого достаточно большого k, иметь ровно $4sk + r$ нулей. Таким образом, для того, чтобы функция $F(z)$ имела лишь действительные нули, необходимо и достаточно, чтобы она на интервале $-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$ имела ровно $4sk + r$ действительных нулей, начиная с достаточно большого k.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что на полосе $a \leqslant x < 2\pi + a$ $(z = x + iy)$ функция $\Phi_*^{(s)}(z)$ имеет ровно $2s$ нулей.

Положим

$$u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \qquad v = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right). \qquad (16)$$

Тогда при $t = e^{iz}$ мы будем иметь $u = \cos z$, $v = \sin z$. Подставляя в полином $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ вместо u и v выражения (16), получим конечный ряд $\varphi_*^{(s)}(t)$ по положительным и отрицательным степеням t. Коэффициент при высшей положительной степени s переменного t будет равен, как легко видеть, $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$ [см. (15)]. Точно так же коэффициент при низшей отрицательной степени $-s$ будет равен $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$ [см. (15)]. Следовательно, оба эти коэффициента отличны от нуля [см. (13)]. Таким образом, уравнение $\varphi_*^{(s)}(t) = 0$ имеет ровно $2s$ корней, и они все отличны от нуля. Обозначим эти корни через $t_1, t_2, \ldots, t_{2s}$. Для решения уравнения

$$\Phi_*^{(s)}(z) = 0 \qquad (17)$$

теперь достаточно решить все уравнения $e^{iz} = t_j$. При фиксированном j такое уравнение имеет на полосе $a \leqslant x < 2\pi + a$ ровно один корень. Если все t_j различны, то мы получаем на рассматриваемой полосе ровно

$2s$ корней уравнения (17). Если же имеются совпадающие t_j, то получается соответственная кратность и для уравнения (17).

Выясним теперь поведение функции $\Phi_m^{(n)}(z)=\varphi_m^{(n)}(\cos z, \sin z)$ при больших значениях $y\,(z=x+iy)$ как положительных, так и отрицательных, именно покажем, что

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m^{(n)}(x+iy)&=e^{ny-nix}\left(\varphi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)+\delta_1\right); \\ \Phi_m^{(n)}(x+iy)&=e^{-ny+nix}\left(\varphi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)+\delta_2\right), \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

где δ_1 равномерно стремится к нулю при $y\to+\infty$, а δ_2 равномерно стремится к нулю при $y\to-\infty$.

Для доказательства соотношений (18) достаточно отметить соотношения

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{ix-y}+e^{-ix+y}), \quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{ix-y}-e^{-ix+y})$$

и принять во внимание поведение функций e^y и e^{-y} при больших положительных и отрицательных значениях y.

Из соотношений (18) непосредственно следуют соответствующие соотношения и для неоднородной функции $\Phi_*^{(s)}(z)$, именно:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_*^{(s)}(x+iy)&=e^{sy-six}\left(\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)+\delta_3\right); \\ \Phi_*^{(s)}(x+iy)&=e^{-sy+six}\left(\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)+\delta_4\right), \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

где δ_3 равномерно стремится к нулю при $y\to+\infty$, а δ_4 равномерно стремится к нулю при $y\to-\infty$.

Выберем теперь такое $b'>0$, что $\Phi_*^{(s)}(x+iy)\neq 0$ при $|y|>b'$. Принимая во внимание соотношения (18) и (19), получаем:

$$\left|\frac{\Phi_m^{(n)}(x+iy)}{\Phi_*^{(s)}(x+iy)}\right|<c_1 \quad (20)$$

при $|y|>b'$, где c_1 — некоторая константа, зависящая от полинома (12) и выбора b'.

Точно так же из соотношений (18) и (19) следует, что

$$\left|\frac{\Phi_m^{(n)}(\pm 2k\pi+\varepsilon+iy)}{\Phi_*^{(s)}(\pm 2k\pi+\varepsilon+iy)}\right|<c_2, \quad (21)$$

где c_2 — некоторая константа, зависящая от полинома (12) и числа ε.

На основе сделанных оценок вычислим теперь число нулей функции $F(z)$ внутри некоторого прямоугольника плоскости комплексного переменного z. Нужный прямоугольник — обозначим его через P_{kb} — зададим соотношениями:

$$-2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2k\pi+\varepsilon, \qquad -b\leqslant y\leqslant b.$$

Функцию $F(z)$ запишем в форме:

$$F(z)=z^r\Phi^{(s)}_{*}(z)\Big(1+\sum_{m<r,\, n\leqslant s} z^{m-r}\frac{\Phi^{(n)}_m(z)}{\Phi^{(s)}_{*}(z)}\Big). \tag{22}$$

Здесь все показатели $m-r$ у z отрицательны, а потому, принимая во внимание соотношения (20) и (21), мы видим, что на границе многоугольника P_{kb} при достаточно больших k и b имеет место соотношение

$$F(z)=z^r\Phi^{(s)}_{*}(z)(1+\delta_5), \tag{23}$$

где δ_5 стремится к нулю при одновременном стремлении к бесконечности чисел k и b. Из последнего соотношения непосредственно следует, что число нулей функций $F(z)$ и $z^r\Phi^{(s)}_{*}(z)$ в прямоугольнике P_{kb} одинаково. Несколькими строками ниже мы докажем это предложение в общем виде, здесь же сделаем вывод из полученного результата. Зафиксируем k на достаточно большом значении и будем стремить b к бесконечности. Тогда мы увидим, что число нулей функций $F(z)$ и $z^r\Phi^{(s)}_{*}(z)$ в полосе $-2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2k\pi+\varepsilon$ одинаково. Для последней же функции число нулей очевидно равно $4sk+r$. Этим теорема доказана, за исключением одного пробела, который мы сейчас пополним.

Замечание. Пусть P — некоторый замкнутый контур в плоскости комплексного переменного z и $g(z)$ — аналитическая функция, не имеющая особенностей как внутри, так и на контуре P, причем на контуре P она не обращается в нуль. Тогда в силу известной теоремы о логарифмическом вычете число нулей функции $g(z)$ внутри контура P равно полному числу оборотов вокруг начала координат вектора $w=g(z)$ в то время, когда переменная z описывает контур P. Пусть теперь функция $g^*(z)$ также аналитическая внутри и на контуре P, связанная на контуре P с функцией $g(z)$ соотношением $g^*(z)=g(z)(1+\delta(z))$, где $|\delta(z)|<1$. Рассмотрим теперь на контуре P функцию $g(z,\tau)=g(z)(1+$ $+\tau\delta(z))$, где τ — действительное число. При фиксированном τ вектор $w=g(z,\tau)$ описывает некоторое число полных оборотов вокруг начала координат, в то время как z пробегает контур P. Если теперь τ непрерывно менять от нуля до единицы, то вектор w никогда не обратится в нуль, и потому число его полных оборотов не может измениться. Таким образом, число нулей функций $g^*(z)$ и $g(z)$ одинаково внутри контура P.

Этим замечанием пробел в доказательстве теоремы III заполнен.

Перейдем теперь к доказательству теоремы II. Заметим, впрочем, что она не нужна для теорем из § 3, решающих вопрос об отрицательности действительных частей всех корней функции $h(z, e^z)$.

Доказательство теоремы II. Пусть полином $f(z, u, v)$ [см. (12)] не имеет главного члена. Обозначим через s наибольшее значение, которое может принимать n в сумме (12), а через r — наибольшее значение индекса m, которое он может принять при $n=s$. Тогда в сумме (12)

присутствует член $z^r \varphi_r^{(s)}(u, v)$. Ввиду отсутствия главного члена в той же сумме присутствует еще член $z^p \varphi_p^{(q)}(u, v)$, у которого $p > r$ и $q < s$. Заменим теперь u и v по формулам (16) и полученную сумму умножим на t^s, чтобы превратить ее в полином $h(z, t)$. В этот полином будет входить член $z^r t^{2s} \varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$, причем член этот будет высшим по степени t и высшим, возможным при этой степени t, по степени z. Сверх того в полиноме $h(z, t)$ будет иметься член $z^p t^{q+s} \varphi_p^{(q)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$, причем $p > r$, $q + s < 2s$. Таким образом, полином $h(z, t)$ не имеет главного члена (см. § 1). Из этого непосредственно следует, что полином $h(-iz, t)$ также не имеет главного члена, и потому уравнение $h(-iz, e^z) = 0$ имеет корни с положительной действительной частью (см. теорему I). Отсюда непосредственно следует, что уравнение $h(z, e^{iz}) = 0$ имеет корень с мнимой частью, отличной от нуля.

Таким образом, теорема II доказана.

Теоремы II и III дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $f(z, \cos z, \sin z)$ имела только действительные нули. Особенно просто решается вопрос в случае, когда полином $f(z, u, v)$ не имеет главного члена. Тогда сразу можно сказать, что функция $f(z, \cos z, \sin z)$ имеет бесчисленное множество недействительных нулей. Для функций с главным членом имеются случаи, когда сравнительно простым исследованием можно обнаружить бесчисленное множество недействительных корней:

ТЕОРЕМА IV. *Пусть полином $f(z, u, v)$ имеет главный член* [см. (14)]. *Если функция $\Phi_*^{(s)}(z) = \varphi_*^{(s)}(\cos z, \sin z)$ имеет недействительные корни, то функция $F(z)$ имеет бесчисленное множество недействительных нулей. Если функция $\Phi_*^{(s)}(z)$ имеет только действительные и притом простые нули, то функция $F(z)$ имеет не более конечного числа недействительных нулей.*

Доказательство. Вместо уравнения $F(z) = 0$ будем рассматривать уравнение

$$\Phi_*^{(s)}(z) + \sum_{m<r,\ n\leqslant s} z^{m-r} \Phi_m^{(n)}(z) = 0. \tag{24}$$

Допустим, что $\Phi_*^{(s)}(c) = 0$, где c — недействительное число. Будем искать решение уравнения (24) в форме $2k\pi + c + \zeta$, где k велико, а ζ мало. Уравнение (24) можно переписать в форме

$$\Phi_*^{(s)}(c + \zeta) + \delta(\zeta) = 0, \tag{25}$$

где $\delta(\zeta)$ — есть аналитическая функция ζ, равномерно сходящаяся к нулю в круге $|\zeta| \leqslant 1$ при $k \to \infty$. Так как левая часть уравнения (25) равномерно сходится к функции $\Phi_*^{(s)}(c + \zeta)$ при $k \to \infty$, а уравнение $\Phi_*^{(s)}(c + \zeta) = 0$ имеет очевидное решение $\zeta = 0$, то уравнение (25) имеет решение ζ_k, близкое к нулю при достаточно большом k. Ввиду того, что c число недействительное, решение $2k\pi + c + \zeta_k$ при достаточно большом k также будет недействительным.

Если уравнение $\Phi_*^{(s)}(z)=0$ имеет все действительные и притом не кратные корни, то на интервале $2k\pi+\varepsilon \leqslant x \leqslant 2(k+1)\pi+\varepsilon$ кривая $w=\Phi_*^{(s)}(x)$ пересекает ось $w=0$ в $2s$ различных точках. Так как кривая

$$w=\Phi_*^{(s)}(x)+\sum_{m<r,\ n\leqslant s} x^{m-r}\Phi_m^{(n)}(x) \qquad (26)$$

при k достаточно большом лишь очень мало отличается от кривой $w=\Phi_*^{(s)}(x)$, то и кривая (26) пересекает ось $w=0$ в $2s$ точках на интервале $2k\pi+\varepsilon \leqslant x \leqslant 2(k+1)\pi+\varepsilon$ при k достаточно большом. Таким образом, число действительных корней функции $F(z)$ на интервале $-2k\pi+\varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi+\varepsilon$ будет равно $4sk+r'$ при достаточно большом k. В силу теоремы III число недействительных нулей функции $F(z)$ равно $r-r'$.

Таким образом, теорема IV доказана.

Вопрос о характере корней функции $\Phi_*^{(s)}(z)$ в интересующем нас смысле приводится к решению того же вопроса относительно некоторого полинома. Для этого нужно выразить $\cos z$ и $\sin z$ через $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$,

$$\cos z=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}},$$

$$\sin z=\frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}},$$

и затем принять $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ за новое неизвестное t. Таким образом, в полиноме $\varphi_*^{(s)}(u,v)$ нужно положить

$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$v=\frac{2t}{1+t^2}$$

и умножить полученное выражение на $(1+t^2)^s$. Полученный так полином обозначим через $\varphi^{(s)}(t)$. Полином этот имеет степень $2s$. Если бы члены с этой степенью сократились, то это означало бы, что полином $\varphi^{(s)}(t)$ имеет бесконечный корень, т. е. уравнение $\Phi_*^{(s)}(z)$ имеет решение $z=\pi$, причем нуль этот имеет кратность, равную понижению степени полинома $\varphi^{(s)}(t)$ против $2s$. Каждому конечному корню t_0 полинома $\varphi^{(s)}(t)$ соответствует нуль функции $\Phi_*^{(s)}(z)$, получаемый из уравнения $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=t_0$, причем действительным корням соответствуют действительные, а недействительным — недействительные. Исключение в этом смысле мог бы представлять корень $t_0=\pm i$, так как уравнение $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\pm i$ не имеет решений. Но полином $\varphi^{(s)}(t)$ не может иметь корня $\pm i$, что

непосредственно вытекает из условия (13). Действительно, мы имеем

$$\varphi^{(s)}(t) = \varphi_r^{(s)}(1-t^2, 2t) + \sum_{n<s} \varphi_r^{(n)}(1-t^2, 2t)(1+t^2)^{s-n}. \qquad (27)$$

Делая замену $t = \pm i$ в этом выражении, мы получаем

$$\varphi^{(s)}(\pm i = \varphi i_r^{(s)}(2, \pm 2i) \neq 0. \qquad [\text{см. } (13)].$$

§ 3. Нули функции $h(z, e^z)$ при наличии главного члена

В § 1 было показано, что функция $h(z, e^z)$ имеет бесчисленное множество нулей с произвольно большими положительными действительными частями в случае, когда полином $h(z, t)$ не обладает главным членом. При наличии главного члена у полинома $h(z, t)$ вопрос о существовании нулей функции $H(z) = h(z, e^z)$ будет решен здесь.

Пусть

$$h(z, t) = \sum_{m, n} a_{mn} z^m t^n \qquad (28)$$

и $a_{rs} z^r t^s$ — главный член полинома (28). Выделим в (28) коэффициент при z^r, т. е. положим:

$$h(z, t) = z^r \chi_*^{(s)}(t) + \sum_{m<r,\, n\leqslant s} a_{mn} z^m t^n. \qquad (29)$$

Функция $\chi_*^{(s)}(e^z)$, очевидно, периодическая с периодом $2\pi i$ и на полосе $b \leqslant y < b + 2\pi$ $(z = x + iy)$ имеет не более s нулей. Таким образом, существует действительное число ε такое, что

$$\chi_*^{(s)}(e^{x+\varepsilon i}) \neq 0 \qquad (30)$$

при произвольном x.

ТЕОРЕМА V. *Пусть $h(z,t)$ — полином с главным членом $a_{rs} z^r t^s$ и ε — такое действительное число, что $\chi_*^{(s)}(e^{x+i\varepsilon}) \neq 0$ при произвольном действительном x* [см. (29)]. *Число нулей функции $H(z)$ на полосе $-2k\pi + \varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi + \varepsilon$, $x > 0$ $(z = x + iy)$ обозначим через N_k. Предположим далее, что функция $H(z)$ не обращается в нуль на мнимой оси, т. е. $H(iy) \neq 0$; обозначим через V_k угол, который опишет вокруг начала координат вектор $w = H(iy)$ в то время, когда y пробегает значения от $-2k\pi + \varepsilon$ до $2k\pi + \varepsilon$. Оказывается, что*

$$V_k = 2\pi \left(2sk - N_k + \frac{1}{2} r\right) + \delta_k,$$

где $\delta_k \to 0$ одновременно с $\frac{1}{k}$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник P_{ka}, определяемый условиями $0 \leqslant x \leqslant a$ $-2k\pi + \varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi + \varepsilon$, и оценим полный поворот вектора $w = H(z)$, когда z пробегает в направлении против часовой стрелки три стороны прямоугольника P_{ka}, за исключением стороны $x = 0$, т. е. стороны нижнюю, правую и верхнюю.

Из соотношений (29) и (30) непосредственно следует, что

$$H(z) = z^r \chi_*^{(s)}(e^z)(1 + \delta_1(z)),$$

где $\delta_1(z)$ равномерно стремится к нулю на указанных трех сторонах прямоугольника P_{ka}, когда k и a одновременно стремятся к бесконечности. Таким образом, искомое вращение вектора w для функции $H(z)$ будет отличаться от вращения для функции $z^r \chi_*^{(s)}(e^z)$ лишь на число η, стремящееся к нулю при $k \to \infty$, $a \to \infty$.

Вращение вектора w для функции $z^r \chi_*^{(s)}(e^z)$ равно сумме вращений его для функции z^r и для функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$. Очевидно, что для функции z^r вращение это вдоль трех сторон прямоугольника P_{ka} равно πr. Для функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$ вращение вдоль нижней стороны сокращается с вращением вдоль верхней стороны, ибо функция $\chi_*^{(s)}(e^z)$ периодическая, и стороны эти пробегаются в противоположных направлениях. Вращение вдоль правой стороны для функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$ мало отличается от вращения вдоль той же стороны функции $a_{rs}e^{sz}$. Для последней же оно очевидно равно $4k\pi s$. Итак, полное вращение для функции $H(z)$ вдоль трех сторон мало отличается от $4\pi sk + \pi r$.

Так как число нулей функции $H(z)$ внутри прямоугольника P_{ka} равно числу полных поворотов вектора $w = H(z)$, когда z пробегает все стороны у прямоугольника P_{ka}, то из сделанного подсчета непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Теорема V показывает, что для нас теперь важно рассмотреть поведение функции $H(z)$ на мнимой оси, т. е. функцию $H(iy)$ при действительном y. Разобьем функцию $H(iy)$ на ее действительную и мнимую части:

$$H(iy) = F(y) + iG(y). \tag{31}$$

Непосредственно видно, что

$$F(y) = f(y, \cos y, \sin y), \quad G(y) = g(y, \cos y, \sin y),$$

где $f(y, u, v)$ и $g(y, u, v)$ — полиномы. Выясним теперь более подробно связь между полиномом $h(z, t)$ и полиномами $f(y, u, v)$ и $g(y, u, v)$.

Положим

$$\alpha^{(n)}(u, v) + i\beta^{(n)}(u, v) = (u + iv)^n,$$

где $\alpha^{(n)}(u, v)$ и $\beta^{(n)}(u, v)$ — полиномы с действительными коэффициентами. Тогда мы имеем:

$$\alpha^{(n)}(u, v) = \frac{1}{2}((u + iv)^n + (u - iv)^n);$$

$$\beta^{(n)}(u, v) = \frac{1}{2i}((u + iv)^n - (u - iv)^n). \tag{32}$$

Покажем, что полином $a\alpha^{(n)}(u, v) + b\beta^{(n)}(u, v) = \gamma^{(n)}(u, v)$, где a и b

действительны и не обращаются одновременно в нуль, удовлетворяет условию (13), т. е.

$$\gamma^{(n)}(1, \pm i) \neq 0. \tag{33}$$

Из (32) имеем $\gamma^{(n)}(1, \pm i) = 2^{n-1}(a \pm ib) \neq 0$.

Непосредственно видно, что

$$f(y, u, v) + ig(y, u, v) = \sum_{m,n} (a'_{mn} + ia''_{mn})\, i^m y^m (\alpha^{(n)}(u, v) + i\beta^{(n)}(u, v)). \tag{34}$$

Здесь $a'_{mn} + ia''_{mn} = a_{mn}$ [см. (28)], причем a'_{mn} и a''_{mn} — действительные числа. Если положить:

$$f(y, u, v) = \sum_{m,\,n} y^m \varphi_m^{(n)}(u, v), \qquad g(y, u, v) = \sum_{m,\,n} y^m \psi_m^{(n)}(u, v), \tag{35}$$

то из (34) получаем, что полиномы $\varphi_m^{(n)}(u, v)$ и $\psi_m^{(n)}(u, v)$ равны полиномам:

$$\pm (a'_{mn}\alpha^{(n)}(u, v) - a''_{mn}\beta^{(n)}(u, v)); \quad \pm (a''_{mn}\alpha^{(n)}(u, v) + a'_{mn}\beta^{(n)}(u, v)), \tag{36}$$

где знаки и порядок соответствия зависят от остатка при делении m на четыре. Пусть λ и μ — два действительные числа, не обращающиеся в нуль одновременно, тогда

$$\lambda f(y, u, v) + \mu g(y, u, v) = \sum_{m,\,n} y^m (\lambda\varphi_m^{(n)}(u, v) + \mu\psi_m^{(n)}(u, v)).$$

Из (36) следует, что $\lambda\varphi_m^{(n)}(u, v) + \mu\psi_m^{(n)}(u, v) = a\alpha^{(n)}(u, v) + b\beta^{(n)}(u, v)$. Так как детерминант матрицы

$$\begin{Vmatrix} a'_{mn} & -a''_{mn} \\ a''_{mn} & a'_{mn} \end{Vmatrix}$$

отличен от нуля при $a_{mn} \neq 0$, то при этом же условии a и b не обращаются одновременно в нуль. Если теперь $a_{rs}z^r t^s$ — главный член полинома $h(z, u, v)$, то главный член полинома $\lambda f(y, u, v) + \mu g(y, u, v)$ есть $y^r\gamma^{(s)}(u, v) = y^r(a\alpha^{(s)}(u, v) + b\beta^{(s)}(u, v))$, где a и b не обращаются одновременно в нуль и, следовательно, он удовлетворяет условию (13).

Так же как и в § 2, выделим коэффициенты $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ и $\psi_*^{(s)}(u, v)$ при y^r, тогда в полиноме $\lambda f(y, u, v) + \mu g(y, u, v)$ коэффициент при y^r будет иметь вид $\lambda\varphi_*^{(s)}(u, v) + \mu\psi_*^{(s)}(u, v)$ и так же, как в § 2, существует такое действительное ε, что $\lambda\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) + \mu\Psi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) \neq 0$ при произвольном действительном y. Очевидно, что при этом условии $\chi_*^{(s)}(e^{x+\varepsilon i}) \neq 0$ при произвольном действительном x.

После этих предварительных замечаний докажем теоремы VI и VII, дающие критерии отсутствия у функции $H(z)$ нулей с положительными или нулевыми действительными частями.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть* $H(z) = h(z, e^z)$, *где* $h(z, t)$ — *полином с главным членом* $a_{rs}z^r t^s$ [см. (28)]. *Положим* $H(iy) = F(y) + iG(y)$. *Если все нули*

функции $H(z)$ *лежат по левую сторону от мнимой оси, то вектор* $w = H(iy)$ *при изменении* y *от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *все время вращается в положительном направлении с положительной скоростью, что аналитически выражается условием* $G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0$ *и сверх того при пробеге* y*-ом интервала* $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$ *вектор* w *описывает угол, равный* $4k\pi s + \pi r + \delta_1$, *где* $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_1 = 0$. *Если, наоборот, вектор* w *описывает угол, равный* $4k\pi s + \pi r + \delta_1$ *в то время, когда* y *пробегает интервал* $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$, *то он вращается все время в положительном направлении с положительной скоростью, и нули функции* $H(z)$ *все расположены по левую сторону от мнимой оси.* (В последнем утверждении предполагается, что функция $H(z)$ не имеет нулей на мнимой оси, так как без этого предположения даже невозможно определить угол поворота вектора w.)

Для формулировки теоремы VII условимся о терминологии. Пусть $p(y)$ и $q(y)$ — две действительные функции действительного переменного. Мы будем говорить, что нули этих функций перемежаются, если каждая из функций не имеет кратных нулей, между каждыми двумя нулями одной функции имеется хоть один нуль другой. Кроме того, предполагается, что функции $p(y)$ и $q(y)$ нигде не обращаются в нуль одновременно. При этих условиях нули функции $p(y)$ и $q(y)$ идут, чередуясь, вдоль оси y.

ТЕОРЕМА VII. *Пусть* $H(z) = h(z, e^z)$, *где* $h(z, t)$ — *полином с главным членом. Функцию* $H(iy)$ *разобьем на ее действительную и мнимую части, т. е. положим* $H(iy) = F(y) + iG(y)$. *Если все нули функции* $H(z)$ *лежат по левую сторону мнимой оси, то нули функций* $F(y)$ *и* $G(y)$ *действительны, перемежаются и*

$$G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0 \tag{37}$$

при всяком y. *Далее, для того, чтобы нули функции* $H(z)$ *все лежали по левую сторону от мнимой оси, достаточно выполнения одного из условий:*

1) *все нули функций* $F(y)$ *и* $G(y)$ *действительны и перемежаются, а неравенство* (37) *выполнено хотя бы для одного значения* y;

2) *все нули функции* $F(y)$ *действительны и для каждого ее нуля* $y = y_0$ *выполнено условие* (37), *т. е.* $F'(y_0)G(y_0) < 0$;

3) *все нули функции* $G(y)$ *действительны и для каждого ее нуля* $y = y_0$ *выполнено неравенство* (37), *т. е.* $G'(y_0)F(y_0) > 0$.

Доказательство теоремы VI и VII. Доказательство разобьем на пункты:

а) Поворот вектора $w = H(iy)$ в то время, когда y пробегает интервал $a \leqslant y \leqslant b$, обозначим через $v(a, b)$. Скорость $\frac{d}{dy}v(0, y)$ вращения вектора w в момент y очевидно выражается по формуле:

$$\frac{d}{dy}v(0, y) = \frac{G'(y)F(y) - F'(y)G(y)}{F^2(y) + G^2(y)}. \tag{38}$$

Таким образом, знак скорости $\frac{d}{dy}v(0, y)$ и знак выражения $G'(y)F(y)-F'(y)G(y)$ совпадают.

$$\text{b)}\quad v(a+\varepsilon, b+\varepsilon)=v(a, b)+\delta_2, \tag{39}$$

где $\delta_2 \to 0$ при ε фиксированном, когда $a \to \pm\infty$ и $b \to \pm\infty$. Прежде всего мы имеем $v(a, b)=v(a, c)+v(c, b)$. Далее из структуры функции $H(z)$ непосредственно видно, что $v(a, a+\varepsilon)=\varepsilon+\delta_3$, где $\delta_3 \to 0$ при фиксированном ε, когда $a \to \pm\infty$. Сопоставляя эти два утверждения, получаем (39).

c) Пусть λ и μ — два действительные числа, не обращающиеся одновременно в нуль, тогда существует такое действительное ε, что при произвольном действительном y одновременно выполнены четыре следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\Phi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy)+\mu\Psi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy) \neq 0;\\ \mu\Phi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy)-\lambda\Psi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy) \neq 0;\\ \Phi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy) \neq 0;\\ \Psi_{\bullet}^{(s)}(\varepsilon+iy) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Выполнение этих неравенств гарантирует применимость теоремы III к функциям $\lambda F(y)+\mu G(y)$, $F(y)$, $G(y)$. Из тех же неравенств следует, что точка $H(\pm 2k\pi i+\varepsilon i)$ при достаточно большом k не лежит ни на одной из прямых $\lambda w'+\mu w''=0$, $w'=0$, $w''=0$ $(w=w'+iw'')$ в плоскости w.

Одновременная выполнимость неравенств (40) следует из замечаний сделанных перед формулировкой теоремы VI.

d) Допустим, что $v(-2k\pi, 2k\pi)=\tau(4k\pi s+\pi r)+\delta_4$, где $\tau=\pm 1$, а $\delta_4 \to 0$ одновременно с $\frac{1}{k}$. Покажем, что при этих условиях функция $\lambda F(y)+\mu G(y)$ имеет только действительные и простые нули при произвольных действительных и не обращающихся одновременно в нуль λ и μ, сверх того

$$\tau(G'(y)F(y)-F'(y)G(y))>0.$$

Для доказательства утверждения d) выберем ε, удовлетворяющее условиям c) при заданных λ и μ. Так как вектор w на интервале $-2k\pi+\varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi+\varepsilon$ описывает угол $\tau(4k\pi s+\pi r)+\delta_5$ (см. b), то геометрически очевидно, что кривая $w=H(iy)$ на том же интервале должна пересечься с прямой $\lambda w'+\mu w''=0$ не менее чем при $4k\pi+r$ различных y. В силу же теоремы III число нулей функции $\lambda F(y)+\mu G(y)$ на том же интервале не превосходит $4ks+r$, таким образом все нули функции $\lambda F(y)+\mu G(y)$ действительные и некратные. Некратность нулей означает, в частности, что кривая $w=H(iy)$ нигде не касается прямой $\lambda w'+\mu w''=0$, т. е. вектор w все время вращается со скоростью, отличной от нуля, а из этого вытекает неравенство $\tau(G'(y)F(y)-F'(y)G(y))>0$ (см. a).

Докажем теперь первые половины теорем VI и VII. Допустим, что все нули функции $H(z)$ лежат по левую сторону от мнимой оси. Тогда

в силу теоремы V и b) $v(-2k\pi, 2k\pi) = 4k\pi s + \pi r + \delta_6$. Отсюда на основании d) заключаем, что нули функций $F(y)$ и $G(y)$ все действительные, простые и $G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0$. Таким образом, вектор w все время вращается против часовой стрелки с положительной скоростью, а из этого геометрически очевидно, что нули функций $F(y)$ и $G(y)$ перемежаются. Таким образом, первые половины теорем VI и VII доказаны.

Докажем теперь вторые половины теорем VI и VII.

Заметим прежде всего, что если $v(-2k\pi, 2k\pi) = 4k\pi s + r + \delta_7$, где δ_7 стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{k}$, то в силу теоремы V и b) видим, что все нули функции $H(z)$ лежат по левую сторону мнимой оси. Таким образом, вторая половина теоремы VI доказана.

Покажем теперь, что если выполнено одно из условий 1), 2), 3) теоремы VII, то имеем $v(-2k\pi, 2k\pi) \geqslant 4k\pi s + \pi r + \delta_7$. В случае, если нули функций $F(y)$ и $G(y)$ действительны, просты и перемежаются, мы на основании теоремы III и b) заключаем из непосредственных геометрических соображений, что $v(-2k\pi, 2k\pi) = \tau(4k\pi + \pi r) + \delta_7$. Таким образом, в силу d) заключаем, что $\tau(G'(y)F(y) - F'(y)G(y)) > 0$, но так как по условию 1) неравенство (37) выполнено хоть в одной точке y, то имеем $\tau = 1$.

Если выполнены условия 2) или 3), то на основании теоремы III, b) и геометрических соображений заключаем, что $v(-2k\pi, 2k\pi) = 4k\pi s + \pi r + \delta_7$ и, следовательно, по ранее замеченному, все нули функции $H(z)$ лежат по левую сторону от мнимой оси. Таким образом, теоремы VI и VII доказаны.

Нижеследующая теорема дает дополнительные соображения к решению вопроса о существовании корней функции $H(z)$ по правую сторону от мнимой оси.

ТЕОРЕМА VIII. *Пусть $H(z) = h(z, e^z)$, где $h(z, t)$ — полином с главным членом $a_{rs}z^r t^s$. Через $\chi_*^{(s)}(t)$ обозначим коэффициент при z^r в полиноме $h(z, t)$. Если функция $\chi_*^{(s)}(e^z)$ имеет хоть один корень по правую сторону от мнимой оси, то функция $H(z)$ имеет бесчисленное множество нулей по правую сторону от мнимой оси. Если все нули функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$ лежат по левую сторону от мнимой оси, то функция $H(z)$ имеет не более конечного числа нулей по правую сторону от мнимой оси.*

Доказательство проводится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы IV.

Вопрос о том, расположены ли все нули функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$ по левую сторону мнимой оси, легко приводится к тому же вопросу относительно полинома. Заметим прежде всего, что нули функции $\chi_*^{(s)}(e^z)$ тогда и только тогда лежат по левую сторону от мнимой оси, когда все нули полинома $\chi_*^{(s)}(t)$ лежат в круге $|t| < 1$. Дробно-линейное преобразование $t = \frac{1 + z_*}{1 - z_*}$ переводит внутренность круга $|t| < 1$ плоскости перемен-

ного t в полуплоскость, лежащую по левую сторону мнимой оси переменного z_*. Таким образом, в полиноме $\chi_*^{(s)}(t)$ следует сделать замену переменного $t = \frac{1 + z_*}{1 - z_*}$, отбросить у полученной дроби знаменатель и решать вопрос для полинома относительно z_* при помощи теорем VI и VII.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
7 III 1942

L. PONTRJAGIN. ON ZEROS OF SOME TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

SUMMARY

Let $h(z, t)$ be a polynomial with real or complex coefficients depending on the variables z and t. In this paper are given the necessary and sufficient conditions for the negativity of the real parts of all zeros of the function $H(z) = h(z, e^z)$.

Let r and s be the degrees of the polynomial $h(z, t)$ with respect to z and t. We call the term of the polynomial $h(z, t)$ containing the product $z^r t^s$ the principal term. Evidently not every polynomial has the principal term.

THEOREM I. *If the polynomial $h(z, t)$ does not contain the principal term then the function $H(z)$ possesses an infinity of zeros with arbitrarily large positive real parts.*

Proof. The solution of the equation $H(z)$ is sought in the form $z = \alpha\, ln\, 2k\pi + 2k\pi i + ln\theta + \zeta$, where α is a positive rational number and $\theta \neq 0$ a complex number depending on the form of the polynomial $h(z, t)$, k a sufficiently large positive number, ζ a sufficiently small variable. It appears that if $h(z, t)$ does not possess the principal term then there exist solutions of such kind with ζ tending to zero when $k \to \infty$.

If there exists the principal term of the polynomial $h(z, t)$ then the character of zeros of the function $H(z)$ is determined by the behaviour of $H(z)$ on the imaginary axis. If $H(iy) = F(y) + iG(y)$, $F(y)$ and $G(y)$ being real functions of the real variable y, then it is easily seen that $F(y) = f(y, \cos y, \sin y)$ and $G(y) = g(y, \cos y, \sin y)$ where $f(y, u, v)$, $g(y, u, v)$ are polynomials with real coefficients. Our problem can be reduced to the investigation of zeros of the function $F(z) = f(z, \cos z, \sin z)$ where $f(z, u, v)$ is a polynomial with real coefficients. $f(z, u, v)$ can be represented in the form

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v), \tag{1}$$

where $\varphi_m^{(n)}(u, v)$ is a homogeneous (with respect to the variables u, v) polynomial of degree n. As we are going to use the substitution $u = \cos z$, $v = \sin z$ we assume without loss of generality that no $\varphi_m^{(n)}(u, v)$ is divisible by $u^2 + v^2$ or $\varphi_m^{(n)}(1, \pm i) \neq 0$ for every polynomial $\varphi_m^{(n)}(u, v)$ in the sum (1). Let r be the degree of $f(z, u, v)$ with respect to z and s be its degree with respect to both u and v. We shall call $z^r \varphi_r^{(s)}(u, v)$ the principal term of $f(z, u, v)$. Evidently, not every polynomial contains the principal term.

THEOREM II. *If the polynomial $f(z, u, v)$ does not contain the principal term then there exists an infinity of zeros of the function $F(z)$ with arbitrarily large imaginary parts.*

The proof is based on Theorem I.

If the polynomial $f(z, u, v)$ contains the principal term then we select the terms containing z^r and we write $f(z, u, v) = z^r \varphi_*^{(s)}(u, v) + \ldots$, where $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ is a (generally, not homogeneous) polynomial of degree s with respect to u, v. Then $\Phi_*^{(s)}(z) = z_*^{(s)}(\cos z, \sin z)$ is a periodic function possessing strictly $2s$ zeros in the region $0 \leqslant x < 2\pi$ $(z = x + iy)$. Thus for almost every ε the function $\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy)$ does not vanish for any real y. Choose such ε that $\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) \neq 0$ for all y.

THEOREM III. *The function $F(z)$ possesses exactly $4ks + r$ zeros in the region $-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$ if k is sufficiently large. Thus the necessary and sufficient condition that all zeros of the function $F(z)$ be real is that there exist exactly $2ks + r$ real zeros of the function $F(x)$ in the interval $-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$ if k is sufficiently large.*

Proof. Consider the rectangle P_{kb} in the z-plane determined by the inequalities: $-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$; $-b \leqslant y \leqslant b$. It is easy to see that $F(z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z)(1 + \delta_1(z))$, where $\delta_1(z)$ is arbitrarily small on the boundary of P_{kb} when k and b are sufficiently large. According to the theorem on the logarithmic residue the functions $F(z)$ and $z^r \Phi_*^{(s)}(z)$ have the same number of zeros in P_{kb}, k and b being sufficiently large. For the latter function this number is evidently equal to $4ks + r$.

Consider again the function $H(z)$ under the assumption that $h(z,t)$ has the principal term. Selecting the terms with z^r we represent $h(z,t) = z^r \chi_*^{(s)}(t) + \ldots$, where $\chi_*^{(s)}(t)$ is a polynomial of degree s with respect to t. $X_*^{(s)}(z) = \chi_*^{(s)}(e^z)$ is a periodic function with the period $2\pi i$ which possesses only a finite number of zeros in the region $0 \leqslant y < 2\pi$. Consequently, for almost every real ε $X_*^{(s)}(x + i\varepsilon) \neq 0$ for all real x. Suppose that ε is chosen in such a way that these inequalities hold.

THEOREM IV. *Let $h(z, t)$ be a polynomial with the principal term and $H(z)$ does not vanish anywhere on the imaginary axis. Denote by N_k the number of zeros of the function $H(z)$ in the region $-2k\pi + \varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi + \varepsilon$, $x > 0$ $(z = x + iy)$. Denote further by V_k the angle drawn by the vector $w = H(iy)$ round the origin when y ranges through the inter-*

val $-2k\pi+\varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi+\varepsilon$. *It appears that* $V_k = 2\pi\left(2ks - N_k + \frac{1}{2}r\right) + \delta_k$, *where* δ_k *tends to zero simultaneously with* $\frac{1}{k}$.

Proof. Consider a rectangle P_{ka} in the z-plane determined by $0 \leqslant x \leqslant a$, $-2k\pi+\varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi+\varepsilon$. As it is known the number of zeros of the function $H(z)$ in P_{ka} is equal to the number of complete turns of the vector $w = H(z)$ when z passes along the boundary of P_{ka} in the positive sense (counter clockwise). As it is easy to establish $H(z) = z^r X^{(s)}_*(z)(1 + \delta_2(z))$, where $\delta_2(z)$ tends to zero when both k and a become infinite, if z belongs to the boundary of P_{ka} excepted its side $x=0$. In view of this relation we can prove that the angle drawn by the vector w when z passes along the lower, the right and the upper sides of the rectangle P_{ka} is equal to $4\pi sk + \pi r + \delta'_k$. The assertion of Theorem follows immediately from this evaluation.

THEOREM V. *Let* $h(z, t)$ *be a polynomial with the principal term and* $H(iy) = F(y) + iG(y)$, *where* $F(y)$ *and* $G(y)$ *take on real values whenever* y *is real. If all zeros of* $H(z)$ *have negative real parts then the vector* $w = H(iy)$ *circulates round the origin in the positive direction with the positive velocity when* y *varies from* $-\infty$ to $+\infty$ *that can be expressed in the form* $G(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0$. *Furthermore the vector* w *draws the angle* $4k\pi s + \pi r + \delta_k$ *with* δ_k *tending to zero at* $\frac{1}{k} \to 0$, *when* y *ranges through the interval* $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$. *Conversely, if the vector* w *draws the angle* $4k\pi s + \pi r + \delta_k$ *when* y *ranges through the interval* $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$ *then* w *circulates in the positive direction with the positive velocity and all zeros of the function* $F(z)$ *have negative real parts (in the second assertion of this theerem* $H(z)$ *is supposed to have no purely imaginary zeros).*

Theorem V will be proved simultaneously with Theorem VI. The formulation of the latter will be preceded by the following terminological remark: let $p(y)$ and $q(y)$ be real functions of the real variable y; we shall say that the zeros of these functions alternate if all their zeros are simple, between every two zeros of one of these functions there exists at least one zero of the other and finally $p(y)$ and $q(y)$ have no common zeros.

THEOREM VI. *Let* $h(z, t)$ *be a polynomial with the principal term and* $H(iy) = F(y) + iG(y)$. *If all zeros of the function* $H(z)$ *have negative real parts then all zeros of* $F(y)$ *and* $G(y)$ *are real, alternate and*

$$G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0. \tag{2}$$

Further, each of the following conditions is sufficient in order that all zeros of the function $H(z)$ *have negative real parts:* 1) *all zeros of* $F(y)$ *and* $G(y)$ *are real and alternate and* (2) *holds for at least one value of* y. 2) *all zeros* y_0 *of* $F(y)$ *are real and* (2) *holds for every zero* y_0, *i. e.* $F'(y_0)G(y_0) < 0$. 3) *all zeros* y_0 *of* $G(y)$ *are real and* (2) *holds for every* y_0, *i. e.* $G'(y_0)F(y_0) > 0$.

Proof of Theorems V and VI. If all zeros of the function $H(z)$

have negative real parts then by Theorem IV $V_k = 4k\pi s + \pi r + \delta_k$. Thus the curve drawn by the variable $w = H(iy)$, when y ranges through the interval $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$, has at least $4ks + r$ intersection points with each right line passing through the origin. If $\lambda w' + \mu w'' = 0$ $(w = w' + iw'')$ is the equation of such a right line then the function $\lambda F(y) + \mu G(y)$ has at least $4ks + r$ different zeros in the interval $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$. According to Theorem III $\lambda F(y) + \mu G(y)$ cannot possess more zeros in this interval. Consequently all zeros of $\lambda F(y) + \mu G(y)$ are real and simple. This implies that the vector w circulates in the positive sense when y increases. Consequently, the zeros of $F(y)$ and $G(y)$ alternate. Thus the first parts of Theorem V and VI are proved.

If $V_k = 4k\pi s + \pi r + \delta_k$ then according to Theorem IV all zeros of the function $H(z)$ have negative real parts, that is the second assertion of Theorem V. Further, if one of the conditions in Theorem VI is fulfilled then by geometrical considerations and Theorem III $V_k = 2k\pi s + \pi r + \delta_k$, that completes the proof of Theorem VI.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 135—142 Série mathématique

Н. Г. ЧУДАКОВ

О ТЕОРЕМЕ ЗИГЕЛЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе дается новое доказательство теоремы Зигеля, не использующее теории алгебраических полей.

Целью настоящей работы является изложить новое доказательство теоремы Зигеля, которое не использует теории алгебраических полей. В основании этого доказательства лежит только теория характеров по mod k. В работе используются идеи Heilbronn'a [1].

Обозначения: c_1, c_2 — абсолютные постоянные; $\chi(n, k) = \chi(n)$ — характер, принадлежащий модулю k.

ЛЕММА 1. *Пусть* $\chi(n, k)$ — *характер 2-го рода; тогда*

1) $0 < L(1, \chi) < 3 \lg k$,

2) $|L'(s, \chi)| < c_1 \lg^2 k$ *для* $s \geqslant 1 - \frac{1}{\lg k}$.

Доказательство проводится с помощью применения леммы Абеля.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\chi(n, k)$ *и* $\chi(n, k_1)$ *первообразные* действительные** характеры, наименьшие модули которых* k *и* k_1, *причем* $k \neq k_1$. *Тогда*

1) *имеет место тождество*

$$\chi(n, k)\, \chi(n, k_1) = \chi_0(n, \varkappa)\, \chi(n, k_2),$$

где $\chi_0(n, \varkappa)$ — *главный характер* mod $\varkappa$, *причем*

$$\varkappa / (k, k_1),$$

$\chi(n, k_2)$ — *первообразный характер* $\bmod k_2$, *причем* $k_2 > 1$.

2) $1 + \chi(n, k) + \chi(n, k_1) + \chi(n, k_2) \geqslant 1$ *для всех* n.

Доказательство. 1) Как известно [3], наименьшие модули для первообразных действительных характеров имеют вид:

$$k = 2^{\alpha} P, \qquad k_1 = 2^{\alpha_1} P_1,$$

*) Ср. [2], стр. 478.

**) т. е. характеры 2-го рода.

где α и $\alpha_1 = 0, 2, 3$; P и P_1 — нечетные числа, не содержащие точных квадратов. Пусть далее $\delta = (P, P_1)$, $P = \delta P'$, $P_1 = \delta P_1'$.

Далее известно, что $\chi(n, k) = \chi(n, 2^\alpha)\left(\frac{n}{P}\right)$; $\chi(n, k_1) = \chi(n, 2^{\alpha_1})\left(\frac{n}{P_1}\right)$. Следовательно,

$$\chi(n, k)\chi(n, k_1) = \chi(n, 2^\alpha)\chi(n, 2^{\alpha_1})\left(\frac{n}{P'P_1'}\right)\left(\frac{n}{\delta}\right)^2. \tag{1}$$

Полагаем

$$\chi_0(n, \varkappa) = \begin{cases} \chi^2(n, 2^\alpha)\left(\frac{n}{\delta}\right)^2, & \text{если } \alpha = \alpha_1, \\ \left(\frac{n}{\delta}\right)^2, & \text{если } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases} \tag{2}$$

Во всех случаях $\chi_0(n, \varkappa)$ = главный характер по mod $\varkappa$, где

$$k = \begin{cases} 2^\alpha \delta, & \text{если } \alpha = \alpha_1, \\ \delta, & \text{если } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Ясно, что $\varkappa/(k, k_1)$. Аналогично полагаем

$$\chi(n, k_2) = \begin{cases} \left(\frac{n}{P'P_1'}\right), & \text{если } \alpha = \alpha, \\ \chi(n, 2^\alpha)\chi(n, 2^{\alpha_1})\left(\frac{n}{P'P_1'}\right), & \text{если } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases} \tag{3}$$

Легко убедиться, что $\chi(n, k_2)$ — первообразный характер по mod k_2, где

$$k_2 = \begin{cases} 2^{\alpha+\alpha_1}P'P_1', & \text{если } \alpha\alpha_1 = 0, \\ 8P'P_1', & \text{если } \alpha + \alpha_1 = 5, \\ P'P_1', & \text{если } \alpha = \alpha_1. \end{cases}$$

Так как $k \neq k_1$, то $k_2 > 1$. Вследствие (1), (2) и (3)

$$\chi(n, k)\chi(n, k_1) = \chi_0(n, \varkappa)\chi(n, k_2).$$

2) Если

$$\chi(n, k)\chi(n, k_1) \neq 0,$$

то $\chi_0(n, \varkappa) \neq 0$; следовательно, $\chi_0(n, \varkappa) = 1$ и $1 + \chi(n, k) + \chi(n, k_1) + \chi(n, k_2) = (1 + \chi(n, k)) = (1 + \chi(n, k_1)) \geqslant 0$. Во всех остальных случаях среди трех чисел $\chi(n, k)$, $\chi(n, k_1)$ и $\chi(n, k_2)$ должно быть, по крайней мере, два равных нулю. Это очевидно, если $\chi(n, k_2) = 0$. Пусть $\chi(n, k_2) \neq 0$, а $\chi(n, k)\chi(n, k_1) = 0$.

Пусть, например,

$$\chi(n, k) = 0.$$

Тогда $(n, k) > 1$, $(n, \varkappa) > 1$ и $(n, k_1) > 1$; следовательно,

$$\chi(n, k_1) = 0,$$

значит

$$1 + \chi(n, k) + \chi(n, k_1) + \chi(n, k_2) \geqslant 1 - 1 = 0.$$

В дальнейшем пусть $x_1, x_2, \ldots, x_q$ — неотрицательные числа;

$$Nx = x_1 x_2 \ldots x_q; \qquad S(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_q.$$

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$a_n = O(n^\alpha); \quad \alpha \geqslant 0, \quad \mu > 0; \quad B > 0.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int \ldots \int_{Nx \geqslant 1} (Nx)^s e^{-Bn^\mu S(x)} dx_1 \ldots dx_q \tag{4}$$

изображает целую функцию аргумента s, *которая стремится к* 0 *при* $\sigma \to -\infty$.

Доказательство. Интегралы

$$\int \ldots \int_{Nx \geqslant 1} (Nx)^s e^{-Bn^\mu S(x)} dx_1 \ldots dx_q \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходятся абсолютно и равномерно в любом круге $|s| \leqslant R$.

Далее в области $Nx \geqslant \frac{1}{2}$ имеет место неравенство $S(x) \geqslant \frac{1}{2}$; поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-Bn^\mu S(x)} < B_1 e^{-BS(x)}, \tag{5}$$

где $B_1 = B(\alpha, \mu, B)$.

Следовательно, ряд (4) сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части плоскости, т. е. изображаемая им функция — целая функция. Непосредственная оценка ряда (1) показывает, что при $\sigma \to -\infty$ сумма ряда стремится к нулю.

ЛЕММА 4. *Пусть все обозначения леммы 3 сохранены, тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int \ldots \int_{Nx \leqslant 1} (Nx)^s e^{-Bn^\mu S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q \tag{6}$$

сходится абсолютно для достаточно больших σ, *и сумма его стремится к* 0, *если* $\sigma \to +\infty$.

Доказательство. Выберем

$$\sigma_0 = \frac{\alpha \ \neg}{\mu q}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{q\mu(\sigma+1)}} < \infty \quad \text{для} \quad \sigma \geqslant \sigma_1$$

Но в таком случае

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int \ldots \int_{Nx < 1} (Nx)^s e^{-Bn^\mu S(x)} dx_1 \ldots dx_q \right| \leqslant B^{-q(\sigma+1)} \Gamma^q(\sigma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{q\mu(\sigma+1)}} < \infty,$$

что доказывает первую часть утверждения.

В силу (5) можно далее написать, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{Nx\leqslant 1}\cdots\int (Nx)^s e^{-Bn^{\mu}S(x)}\,dx_1\ldots dx_q\right| <$$

$$< (1-\delta)^{\sigma-\sigma_0} B_2 + B_1 \int_{1-\delta\leqslant Nx\leqslant 1}\cdots\int e^{-BS(x)}\,dx_1\ldots dx_q, \qquad (7)$$

где

$$\frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant 1;\ B_2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_{Nx\leqslant 1-\delta}\cdots\int (Nx)^{\sigma_0} e^{-Bn^{\mu}S(x)}\,dx_1\ldots dx_q.$$

Но непосредственная оценка показывает, что

$$\int_{1-\delta\leqslant Nx\leqslant 1}\cdots\int e^{-BS(x)}\,dx_1\ldots dx_q = O(\delta). \qquad (8)$$

(7) и (8) убеждают нас в том, что ряд (6) стремится к 0, если $\sigma\to+\infty$.

ТЕОРЕМА I. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

имеет полуплоскость сходимости, а изображаемая им функция удовлетворяет условиям

1. $f(s)$ — *мероморфная функция, имеющая конечное число полюсов.*
2. *Существуют такие* $\lambda>0$, $A>0$ *и натуральное* q, *что функция*

$$F(s)=A^s\Gamma^q(\lambda s)f(s)$$

удовлетворяет функциональному уравнению $F(1-s)=F(s)$.

3. *В полуплоскости* $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$ *(вне полюсов) справедлива оценка:* $f(s)=O(|t|^{\beta})$ *(равномерно относительно* σ*).*

Тогда

$$F(s)-F_0(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{Nx\geqslant 1}\cdots\int\left[(Nx)^{\lambda s-1}+(Nx)^{\gamma(1-s)-1}\right]e^{-A^{-\mu}n^{\mu}S(x)}dx_1\ldots dx_q, \quad (9)$$

где $F_0(s)$ — *главная часть* $F(s)$; $\mu=(q\lambda)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\rho(s)$ равна разности между левой и правой частями (9); в силу леммы 3 функция $\rho(s)$ — целая функция.

Кроме того, легко обнаружить, что

$$\rho(1-s)=\rho(s).$$

Поэтому ограничимся оценкой $\rho(s)$ в полуплоскости $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$.

Пусть σ_1 так велико, что все полюса $F(s)$ лежат в полуплоскости $\sigma\leqslant\sigma_1$; кроме того, пусть

$$\sigma_1\geqslant\sigma_0 \qquad \text{(см. лемму 4).}$$

Тогда в полосе

$$\frac{1}{2}\sigma \leqslant \sigma_1$$

имеем

$$\rho(s) = O(e^{-\frac{\pi}{2}q\lambda|t|}|t|^{\beta}) = o(1).$$

Наконец, в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_1$ имеем:

$$A^s \Gamma^q(\lambda s) n^{-s} = \int_0^{\infty} \cdots \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-n^{\mu} A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q.$$

$$F(s) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \cdots \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-n^{\mu} A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q.$$

Значит

$$\rho(s) = -F_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big[-\int_{Nx \geqslant 1} \cdots \int (Nx)^{\lambda(1-s)-1} e^{-n^{\mu} A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q +$$

$$+ \int_{Nx \leqslant 1} \cdots \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-n^{\mu} A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q \Big] = O(1).$$

Если же $\sigma \to +\infty$, то в силу леммы 3 и 4 функция $\rho(s) \to 0$. Таким образом, $\rho(s) \equiv 0$.

Пусть теперь $\chi(n, k)$ и $\chi(n, k_1)$ два первообразных характера 2-го рода, причем k и k_1 — их наименьшие модули и $k \neq k_1$. В силу леммы 2 мы можем написать:

$$\chi(n, k)\chi(n, k_1) = \chi_0(n, \varkappa)\chi(n, k_2), \tag{10}$$

где $\chi,(n, k_2)$ — первообразный характер, k_2 / kk_1.

Пусть

$$L(s, \chi),\ L(s, \chi_1) \quad \text{и} \quad L(s, \chi_2),$$

L — ряды, построенные соответственно для характеров

$$\chi = \chi(n, k), \quad \chi_1 = \chi(n, k_1),\ \chi_2(n, k_2).$$

Пусть далее

$$q = \frac{1}{2}\Big(5 + \chi(-1) + \chi_1(-1) + \chi_2(-1)\Big); \quad \lambda = \frac{2}{q}; \quad A = 2^{q-4}\pi^{-2}(kk_1k_2)^{\frac{1}{2}};$$

$$f(s) = \zeta(s) L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2); \qquad F(s) = A^s \Gamma^q(\lambda s) f(s).$$

В силу (10)

$$\chi(-1)\chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1,$$

т. е. значение -1 может встречаться только четное число раз среди чисел $\chi(-1), \chi_1(-1)$ и $\chi_2(-1)$. Значит q равно или 2, или 4; $\lambda = 1$ или $\frac{1}{2}$.

Нетрудно теперь проверить, что $f(s)$ и $F(s)$ удовлетворяют всем условиям теоремы I, ибо

$$F(s) = (2\sqrt{\pi})^{q-4}\,\xi(s)\,\xi(s,\chi)\,\xi(s,\chi_1)\,\xi(s,\chi_2),$$

где

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi), \quad \delta = \frac{1}{2}(1-\chi(-1)),$$

. . . .

. . . .

Далее заметим, что в этом частном случае $F(s)$ имеет только два полюса 1-го порядка: $s=0$ и 1.

Значит, $F_0(s) = \frac{\gamma}{s(1-s)}$, где

$$\gamma = -A\Gamma^q(\lambda)\,L(1,\chi)\,L(1,\chi_1)\,L(1,\chi_2).$$

Наконец, заметим, что

$$\lg\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\,(1+\chi(n,k)+\chi(n,k_1)+\chi(n,k_2))}{n^s}, \qquad (11)$$

где

$$\lambda(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ имеет разные простые делители,} \\ \frac{1}{m}, & \text{если } n = p^m. \end{cases}$$

Но в силу леммы 2 все коэффициенты правой части (1) неотрицательны, значит и $a_n \geqslant 0$.

Применим теперь к функции $F(s)$ теорему I, полагая, что

$$0 < s < 1.$$

Мы придем к тождеству (9). В этом последнем мы опустим в правой части все члены кроме первого. В результате мы получим неравенство

$$F(s) - \frac{\gamma}{s(1-s)} > \int\limits_{Nx\geqslant 1}\cdots\int (Nx)^{\lambda s-1}\,e^{-A^{-\mu}S(x)}\,dx_1\ldots dx_q. \qquad (12)$$

ТЕОРЕМА II. *Пусть ρ — наибольший действительный корень $L(s,\chi)$, k — наименьший модуль $L(s,\chi)$, $\varepsilon > 0$.*

Тогда

$$1-\rho > k^{-\varepsilon} \quad \textit{для} \quad k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Доказательство. Теорему достаточно доказывать только для L-рядов, для которых справедливо неравенство

$$1-\rho < \frac{1}{\lg k}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $k > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $16\pi^4$.
Пусть ρ_1 — наибольший действительный корень для L-ряда $\bmod k_1$; тогда

$$1-\rho_1 < \frac{1}{\lg k_1} < \varepsilon .$$

Пусть $k > k_1$ и $L(s, \chi)$ — любой из первообразных характеров $\bmod k$.

Полагаем теперь в (12) число $s = \rho_1$; это дает нам

$$B_3 L(1, \chi) L(1, \chi_1) A > \int \underset{Nx \geqslant 1}{\cdots} \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q , \qquad (13)$$

где

$$B_3 = \frac{\pi^2 L(1, \chi_1)}{\rho_1 (1-\rho_1)} .$$

Но в нашем случае $A > 1$; поэтому, ограничиваясь в (13) областью интеграции

$$A^{\mu} \leqslant x_i \leqslant 2A^{\mu} \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

мы получаем такую оценку снизу:

$$\int \underset{Nx \geqslant 1}{\cdots} \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-A^{-\mu} S(x)} dx_1 \ldots dx_q > B_4 A^{\rho_1} ,$$

где

$$B_4 = B_4 (\varepsilon, \rho_1) .$$

Наконец, в силу леммы 1, имеем

$$L(1, \chi) L(1, \chi_1) < c_2 (1-\rho) \lg^3 k.$$

Значит (13) можно переписать так:

$$1-\rho > B_5 A^{\rho_1 - 1} \lg^{-3} k > B_6 K^{\rho_1 - 1} \lg^{-3} k ,$$

где B_6 не зависит от k; так как $\rho_1 - 1 > -\varepsilon$, то для достаточно больших k

$$1-\rho > k^{-\varepsilon} .$$

Из теоремы II следует, что для бинарных квадратических форм

$$hR \geqslant k^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \quad \text{для} \quad k \geqslant k_0(\varepsilon) .$$

Здесь h — число классов дискриминанта $\pm k$, R — регулятор.

Саратовский государственный университет

Поступило
15 IX 1941

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Heilbronn, On Dirichlet's series which satisfy a certain functional equation, Quarterly Journal of Mathematics, Oxf. series, 9 (1938), 194—195.
2. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, Leipzig u. Berlin, 1909.
3. A. Page, On the number of the primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 39 (1935), 116—141.

N. TCHUDAKOFF. ON SIEGEL'S THEOREM

SUMMARY

In this paper I give a modification of Heilbronn's proof of Siedel's theorem. I do not use the theory of algebraic numbers.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 143—170 Série mathématique

Ю. Ф. СИРВИНТ

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В АБСТРАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ I. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Эта работа была защищена автором в качестве кандидатской диссертации в октябре 1939 г. Она разделяется на две части. В публикуемой здесь первой части исследуются некоторые геометрические свойства абстрактного пространства, именно свойства выпуклых «окружений» в линейном и в линейном топологическом пространстве. Факты, установленные здесь, найдут применение во второй части, при исследовании линейных функционалов в линейном топологическом пространстве. Результаты этой части были опубликованы без доказательств в ДАН, XXVI, № 2 (1940).

Терминология и обозначения

E есть линейное пространство [см. (1)*, стр. 26]. Элемент нуль пространства E обозначается через 0.

Символы $\in$, non $\in$, $\subset$, $\supset$ имеют обычное значение соответственно принадлежит, не принадлежит, входит в, содержит.

Символ $\underset{x}{\mathcal{E}}(\quad)$ означает: множество точек x, удовлетворяющих условию, написанному в ( ).

Соединением множеств $U, V, \ldots$ точек x называется множество

$$\mathcal{E}(x \in \text{либо } U, \text{либо } V, \ldots),$$

оно обозначается $S(U, V, \ldots)$.

Пересечением множеств $U, V, \ldots$ точек x называется множество

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \text{одновременно и } U \text{ и } V, \ldots)$$

общая часть множеств $U, V, \ldots$ Оно обозначается $P(U, V, \ldots)$.

*) Цифры в ( ) относятся к библиографии в конце.

Если $x_0 \in E$, a вещественно и $U \subset E$, то

$$x_0 + U = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = x_0 + x', \quad \text{где } x' \in U).$$

Операция построения такого множества называется переносом множества U.

Наряду с этим

$$aU = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = ax', \text{ где } x' \in U).$$

Операция построения такого множества в том случае, когда $a \neq 0$, называется преобразованием подобия множества U.

Суммой множеств U и V называется

$$U + V = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = x' + x'', \quad \text{где } x' \in U, \quad x'' \in V).$$

Вместо $U + (-1)V$ мы будем писать просто $U - V$.

Множество U называется выпуклым, если, каковы бы ни были положительные λ и μ с $\lambda + \mu = 1$, выполняется

$$\lambda U + \mu U = U.$$

Глава 1

Выпуклая топологизация линейного пространства

Пусть E — линейное пространство. Для того чтобы превратить E в нормированное пространство, необходимо и достаточно определить в E множество U, удовлетворяющее определенным условиям, — единичную сферу пространства E.

После того как это сделано, всякое множество точек E, полученное из U при помощи операций подобия, переноса и соединения, будет названо открытым множеством. Удобным инструментом исследования свойств нормированного пространства является норма $|x|$, определенная для любого $x \in E$ как точная нижняя граница чисел $a > 0$, для которых $x \in aU$.

На практике обычно поступают наоборот, т. е. a priori определяют в E норму элемента, удовлетворяющую определенным условиям [(1), стр. 53], но с более общей точки зрения следует рассматривать вопрос именно вышеуказанным образом — см., например, статью Колмогорова (6).

В этой главе мы дадим эффективный метод выпуклой топологизации линейного пространства E, т. е. метод превращения его в локально выпуклое пространство. Этот метод будет применен дальше, в главах о пространстве функционалов.

Этот метод приведет нас к псевдометрикам Неймана [см. (2), стр. 18] как к инструменту исследования локально выпуклого пространства, аналогичному норме для пространства нормированного.

Два понятия лягут здесь в основу: понятие «окружения» и понятие «приведенного семейства открытых множеств».

§ 1. Общие теоремы об окружениях

Так как пространство E лишено какой бы то ни было топологии, понятие окрестности не имеет в нем смысла. Мы введем сейчас чисто алгебраическое понятие, представляющее многочисленные аналогии с понятием окрестности. Именно, мы будем говорить, что множество $U \subset E$ есть окружение элемента 0 в E, если, каково бы ни было $x \in E$, можно указать такое вещественное $a > 0$, что $a > |h|$ влечет $hx \in U$. Множество $U \subset E$ будет называться окружением точки x_0, если $U - x_0$ есть окружение нуля.

Мы будем говорить также, когда U является окружением точки x_0, что U окружает точку x_0 или что x_0 окружено множеством U.

Мы видим, что пространство E окружает каждую из своих точек, что соединение окружений x есть снова окружение x и что пересечение в конечном числе окружений x есть снова окружение x.

Пусть U есть окружение нуля, которое, кроме того, выпукло. Положим тогда

$$|x/U| = \inf a, \quad x \in aU, \quad a > 0. \tag{1}$$

Обозначая через h это число, мы имеем, каково ни было $\varepsilon > 0$,

$$x \in (h+\varepsilon)U, \quad x \operatorname{non} \in (h-\varepsilon)U, \quad \text{когда} \quad \varepsilon < h \tag{1-bis}$$

(второе неравенство имеет смысл рассматривать только тогда, когда $h > 0$).

Функционал $|x/U|$ определен для каждого окружения нуля в пространстве E и для каждой точки пространства E. Мы будем рассматривать этот функционал лишь для выпуклых окружений U нуля в E и будем называть его относительной нормой элемента x.

Следующие свойства $|x/U|$ могут быть с легкостью доказаны:

1° $0 \leqslant |x/U| < \infty$; $|0/U| = 0$;

2° $|x/U| > 1$ влечет $x \in U$ $|x/U| > 1$ влечет x non U;

3° $|ax/bU| = \frac{a}{b}|x/U|$ если $\frac{a}{b} \leqslant 0$;

4° $|x/P(U_1, U_2)| = \max(|x/U_1|, |x/U_2|)$;

5° $|x_1 + x_2/U| \leqslant |x_1/U| + |x_2/U|$ (аксиома треугольника).

Функционал $|x/U|$ был введен Нейманном [(2), стр. 18], который обозначал его $\|x\|_u^+$ и называл «псевдометрика». Нейманн определял псевдометрику в пространстве топологическом и локально выпуклом; множество U у него — выпуклая окрестность нуля.

Свойства 1° и 5° можно найти, например, в (2), стр. 18. Свойства 2°, 3°, 4° доказываются непосредственно.

Если множество U таково, что всегда $|x/U|=1$ влечет $x \operatorname{non} \in U$, мы будем говорить, что U окружает точку нуль открытым образом.

Если $|x/U|=0$ всегда влечет $x=0$, мы будем говорить, что U окружает нуль конечным образом. В противоположном случае мы скажем, что U окружает нуль бесконечным образом.

Слова: «множество U окружает точку x_0 открытым (конечным) образом» будут означать: множество $U-x_0$ окружает нуль открытым (конечным) образом.

Переведем теперь все предшествующие определения на геометрический язык. Очевидно, что выпуклое окружение точки x_0 — это такое выпуклое множество U, пересечение которого с каждой прямой, проходящей через x_0, есть отрезок, заключающий x_0 внутри себя. При этом U окружает x_0 открытым (соответственно конечным) образом, если упомянутый отрезок всегда открытый (соответственно конечный).

Выпуклые множества, окружающие точку нуль открытым и конечным образом, всегда существуют в линейном пространстве. Чтобы построить пример такого множества, обозначим через $\{x_\xi\}_{\xi<\beta}$ вполне упорядоченное множество, являющееся базой Хамеля пространства E, т. е. такое множество элементов E, при помощи которого каждый $x \in E$ может быть представлен в виде

$$x = a_1 x_{\xi_1} + a_2 x_{\xi_2} + \ldots + a_n x_{\xi_n}$$

и притом единственным образом. Вещественные числа a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ (число n изменяется вместе с $x \in E$) будут называться координатами точки x.

Множество K точек E, у которых модули координат меньше единицы, составляет, очевидно, окружение нуля выпуклое и, кроме того, открытым и конечным образом.

Нам будет полезно для дальнейшего решить следующую проблему. Предположим, что U есть выпуклое множество, которое окружает одновременно точку нуль и точку x_0 из E. Тогда, каково бы ни было $x \in E$, числа $|x/U|$ и $|x/U-x_0|$ определены. В каком отношении находятся между собой эти два числа?

ЛЕММА. *Положим* $|x/U-x_0|=h$. *Тогда число* h *удовлетворяет уравнению*

$$|x+hx_0/U|=h. \tag{2}$$

Доказательство. Мы имеем, вследствие (1-bis), каково бы ни было $\varepsilon>0$,

$$x \in (h+\varepsilon)U-(h+\varepsilon)x_0,$$

$$x \operatorname{non} \in (h-\varepsilon)U-(h-\varepsilon)x_0, \qquad \text{если } \varepsilon<h,$$

откуда следует

$$|x+(h+\varepsilon)x_0/(h+\varepsilon)U| \leqslant 1,$$
$$|x+(h-\varepsilon)x_0/(h-\varepsilon)U| \geqslant 1, \quad \text{если } \varepsilon<h,$$

т. е.

$$|x+(h+\varepsilon)x_0/U| \leqslant h+\varepsilon; \qquad |x+(h-\varepsilon)x_0/U| \geqslant h-\varepsilon.$$

Второе неравенство остается верным, но становится тривиальным даже когда $\varepsilon \geqslant h$.

Аксиома треугольника дает нам теперь

$$|x+hx_0/U|-\varepsilon|-x_0/U| \leqslant h+\varepsilon,$$
$$|x+hx_0/U|+\varepsilon|-x_0/U| \geqslant h-\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последних неравенствах, мы приходим к формуле (2), которую надо было доказать.

Формула (2) позволяет оценить число h. Мы имеем

$$|x/U|-h|-x_0/U| \leqslant |x/U|+h|x_0/U|$$

и, следовательно, возвращаясь к значению числа h,

$$\frac{|x/U|}{1+|-x_0/U|} \leqslant |x/U-x_0| \leqslant \frac{|x/U|}{1-|x_0/U|}. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) позволяют установить три весьма существенных предложения:

ТЕОРЕМА I. *Пусть U — выпуклое окружение нуля. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы x_0 было окружено множеством U, является: $|x_0/U| < 1$.*

ТЕОРЕМА II. *Если выпуклое множество U окружает одну из своих точек открытым образом, то оно окружает открытым образом всякую свою точку.*

ТЕОРЕМА III. *Если выпуклое множество U окружает одну из своих точек конечным образом, то все точки x, окруженные множеством U, окружены конечным образом.*

Доказательство теоремы I. Высказанное условие необходимо. В самом деле, пусть $x_0 \in E$ — точка, окруженная множеством U. Тогда число $h=|x_0/U-x_0| \geqslant 0$ определено. Вследствие (2) мы имеем

$$|x_0+hx_0/U|=h$$

и, следовательно,

$$|x_0/U|=\frac{h}{1+h}<1.$$

Высказанное условие достаточно. Пусть $x_0 \in E$ — точка такая, что $|x_0/U|<1$. Покажем, что $U-x_0$ окружает точку нуль.

Для этой цели выберем произвольное $x \in E$ и рассмотрим функцию вещественной переменной t

$$\varphi(t)=|x_0+tx/U|.$$

Это — функция непрерывная. Аксиома треугольника обеспечивает нам выполнение для нее условия Липшица

$$-\delta|-x/U| \leqslant \varphi(t+\delta)-\varphi(t) \leqslant \delta|x/U| \quad (\delta \geqslant 0).$$

Кроме того, $\varphi(0)=|x_0/U|<1$. Следовательно, существует такое $a>0$, что при $|t|<a$ мы еще имеем $\varphi(t)<1$, т. е., иными словами,

$$|x_0+tx/U|<1,$$

откуда следует, что (см. 2°, § 1)

$$x_0 + tx \in U \quad \text{при} \quad |t| < a,$$

т. е., окончательно,

$$tx \in U - x_0 \quad \text{при} \quad |t| < a.$$

Ввиду произвольности x, последнее соотношение убеждает нас, что множество U окружает x_0, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы II. Пусть U — выпуклое окружение открытым образом точки нуль. Тогда утверждение, что $x \in U$, эквивалентно $|x/U| < 1$, и мы видим, вследствие теоремы I, что U окружает каждую свою точку. Допустим, что $x_0 \in U$ и предположим, что для некоторого $x \in E$ мы имеем $|x/U - x_0| = 1$, тогда из формулы (2) мы получим, что

$$|x + x_0/U| = 1,$$

следовательно, $x + x_0 \operatorname{non} \in U$ и окончательно $x \operatorname{non} \in U - x_0$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы III. Пусть $x_0 \in U$ есть точка, окруженная множеством U. Выберем $x \in E$, $x \neq 0$. Так как множество U окружает точку нуль конечным образом, мы должны иметь $|x/U| > 0$, а потому, применяя (3), имеем

$$|x/U - x_0| \geqslant \frac{|x/U|}{1 + |-x_0/U|} > 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Топологизация линейного пространства

Мы будем теперь заниматься различными топологиями, которые возможно определить в пространстве E. Эти слова «определить некоторую топологию» означают для нас: «определить семейство подмножеств пространства E, которые уславливаются называть открытыми множествами». Открытое множество будет также называться окрестностью любой своей точки.

Мы будем рассматривать в дальнейшем только такие топологии в E, которые преобразуют E либо в пространство линейное топологическое, либо в локально выпуклое.

Линейное топологическое пространство [в смысле Колмогорова ([6]), стр. 29] — это такое линейное пространство, в котором семейство открытых множеств подчинено следующим аксиомам:

1. Семейство открытых множеств инвариантно по отношению к операциям соединения множеств; пересечения множеств в конечном числе; переноса множеств; преобразования подобия.

2. Каковы бы ни были точки x и $y \neq x$ из E, существует открытое множество U, для которого $x \in U$, $y \operatorname{non} \in U$.

3. Каковы бы ни были точки x и y из E и окрестность W их суммы $x + y$, всегда существует окрестность U точки x и окрестность V точки y такие, что $U + V \subset W$.

4. Каково бы ни было $x \in E$, вещественное число a и окрестность V точки ax, существует такая окрестность U точки x и такое число $\delta > 0$, что

$$hU \subset V, \quad \text{когда} \quad |h-a| < \delta.$$

Топологию, удовлетворяющую условиям 1—4, я буду называть «линейная топология».

Пространство называется локально выпуклым [в смысле Тихонова ([3]), стр. 768], если, кроме аксиом 1—4, соблюдена аксиома

5. Каждая окрестность точки x содержит выпуклую окрестность точки x.

Топологию, удовлетворяющую условиям 1—5, я буду называть «выпуклая топология».

Пространство E, обогащенное линейной выпуклой топологией, является пространством более общей природы, чем пространство линейное топологическое (выпуклое) в смысле Неймана [([2]), стр. 4]. Именно, аксиома (2) Неймана:

Существует последовательность окрестностей нуля U_n со свойством $P(U_1, U_2, \ldots) = (0)$*, отброшена нами.

Условия 1—5 не независимы: аксиома 3 вытекает из 1 и 5; мы докажем на этот счет более точное предложение, именно

ТЕОРЕМА IV. *Для того чтобы топология, определенная в пространстве E, была выпуклая, необходимо и достаточно, чтобы семейство открытых множеств удовлетворяло аксиомам 1, 2 и, кроме того, каждая окрестность нуля, окружающая нуль открытым образом, содержит выпуклую окрестность нуля.*

Доказательство. Условие необходимо. В самом деле, рассмотрим выпуклую топологию в E; пусть U есть выпуклая окрестность нуля. Покажем, что U окружает нуль. Рассмотрим произвольное $x \in E$. Вследствие аксиомы 4 и того, что $0 \cdot x = 0$, существует окрестность U_x точки x и число $\delta > 0$ со свойством $hU_x \subset U$ как только $-\delta < h < \delta$. В частности, значит, $hx \in U$ лишь только $|h| < \delta$. Следовательно, по самому определению окружения U окружает нуль. Покажем, что она окружает его открытым образом. Пусть $x_0 \in U$. Вследствие аксиомы 1 множество $U - x_0$ есть окрестность нуля. Согласно только что доказанному, это множество окружает нуль, следовательно, U окружает x_0. Мы видим, что U окружает каждую свою точку, а это возможно, применяя теорему I, только для окружений открытым образом.

Далее, условие достаточно. В самом деле предположим, что оно выполнено, и выведем из него аксиомы 3 и 4.

Аксиома 3. Пусть W есть окрестность $x+y$. Тогда $W-x-y$ есть окрестность нуля; возьмем за U выпуклую окрестность нуля, содержащуюся в $W-x-y$. Множества $x+\frac{1}{2}U$ и $y+\frac{1}{2}U$ являются соответ-

---

* (0) есть множество, состоящее из одного элемента 0.

ственно окрестностями x и y. Так как множество U выпукло, то мы имеем

$$\left(x+\frac{1}{2}U\right)+\left(y+\frac{1}{2}U\right)=x+y+U\subset W,$$

что и требовалось доказать.

Аксиома 4. Пусть V — окрестность точки ax, и пусть U_0 — выпуклая окрестность нуля, окружающая нуль, которая содержится в $V-ax$ и которая, кроме того, симметрична: $U_0=-U_0$. Последнее обстоятельство очевидно всегда может быть осуществлено.

Положим

$$\delta=\begin{cases}\dfrac{1}{2|x/U_0|}, & \text{если} \quad |x/U_0|>0,\\ 1, & \text{если} \quad |x/U_0|=0,\end{cases}$$

$$U=\frac{1}{2(|a|+\delta)}U_0+x.$$

Пусть теперь h—число между $a-\delta$ и $a+\delta$. Полагая $h=a+\varepsilon$, мы имеем $-\delta<\varepsilon<\delta$, а потому

$$hU=ax+\varepsilon x+\frac{h}{2(|a|+\delta)}U_0\subset ax+\varepsilon x+\frac{1}{2}U_0.$$

Кроме того, выполняется $|\varepsilon x/U_0|<\delta|x/U_0|=\frac{1}{2}$, если $|x/U_0|>0$, и $|\varepsilon x/U_0|=0<\frac{1}{2}$, если $|x/U_0|=0$, иными словами во всех случаях $\varepsilon x\in\frac{1}{2}U_0$ и окончательно

$$hU\subset ax+\frac{1}{2}U_0+\frac{1}{2}U_0=ax+U_0\subset V,$$

что и требовалось доказать.

Теорема IV теперь полностью доказана.

Рассмотрим семейство F открытых множеств в E — не обязательно всех открытых множеств. Предположим, что это семейство F обладает свойством, что всякое открытое множество в E может быть получено из множеств семейства F при помощи операций подобного преобразования, переноса, пересечения в конечном числе и соединения множеств. Порядок, в котором перечислены эти операции, играет существенную роль (если их применять к множествам из F в порядке, отличном от этого, то может случиться, что мы получим в результате более узкое семейство множеств).

Предположение, которое мы формулировали, означает другими словами, что семейство множеств вида

$$P(x_1+h_1U_1, \ldots, x_n+h_nU_n), \tag{4}$$

где $U_i\in F$, h_i — некоторые вещественные числа, $x_i\in E$, $n=1, 2, \ldots$, составляет базу открытых множеств в E: каково бы ни было $x\in E$, каждая окрестность точки x содержит окрестность этой точки, представимую в виде (4) с соответственно подобранным U_i, h_i, x_i ($i=1, 2, \ldots, n$).

Семейство F, удовлетворяющее нашему предположению, будет называться в дальнейшем: приведенное семейство открытых множеств.

Чтобы определить в E топологию, достаточно определить в нем приведенное семейство открытых множеств. Такой способ топологизации обеспечивает нам выполнение аксиомы 1. Заметив это обстоятельство, перейдем к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА V. *Для того чтобы топология, которую мы вводим в пространство E, была выпуклой, достаточно, чтобы приведенное семейство удовлетворяло следующим условиям: каждое множество U из приведенного семейства F открытых множеств есть выпуклое окружение нуля открытым образом, и, кроме того, пересечение всех множеств семейства F не содержит ни одного бесконечного луча или, что то же самое, каждому $x \in E$, $x \neq 0$ соответствует некоторое $U \in F \subset |x/U| > 0$.*

Доказательство. Прежде всего несколько слов об утверждении: «что то же самое». Если множество $P(U, V, \ldots)$ не содержит ни одного бесконечного луча, то оно тем более не содержит ни одного луча вида ax (x фиксировано, $U \neq 0$, a переменно и $a > 0$). Итак, каждому $x \neq 0$ соответствует $a > 0$ и некоторое $U \in F$ со свойством $ax \operatorname{non} \in U$, следовательно, $|x/U| \geqslant \frac{1}{a} > 0$.

Если множество $P(U, V, \ldots)$ содержит бесконечный луч, то тогда каждое $U \in F$ содержит этот луч. Обозначим этот луч через L. Мы видим, что U окружает каждую точку L бесконечным образом. Пусть x_0 — одна из этих точек. Так как $L - x_0 \subset U - x_0$, то мы будем иметь для $x \in L - x_0 - |x/U - x_0| = 0$ и, наконец, вследствие формулы (2), $|x/U| = 0$.

Докажем теперь главную часть теоремы. Именно, мы докажем, что если приведенное семейство удовлетворяет условиям теоремы, то топология, которую это приведенное семейство определяет в E, удовлетворяет условиям теоремы IV.

Аксиома 1. Удовлетворена, как мы заметили выше.

Аксиома 2. Пусть x и y — две различные точки E. Тогда существует для $y - x \neq 0$ некоторое $U \in F$ с $|y - x/U| > 0$. Положим

$$V = x + \frac{1}{|y - x/U|} U;$$

имеем $x \in V$, $y \operatorname{non} \in V$, что и требовалось доказать.

Выберем теперь произвольную окрестность нуля. Она содержит окрестность нуля, имеющую форму (4). Это — выпуклое множество, окружающее нуль открытым образом. Первое очевидно; чтобы сделать очевидным второе, надо вспомнить, что

$$|x/P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x/x_i + h_iU_i|.$$

Следовательно, когда левая часть равенства равна единице, то из этого следует, что одна из величин $|x/x_i + h_iU_i|$ равна единице, а потому $x \operatorname{non} \in P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n)$.

Согласно предшествующему, условия теоремы IV выполнены, и, стало быть, топология, определенная в E рассматриваемым приведенным семейством, выпукла.

§ 3. Свойства топологии

Мы увидим сейчас, что можно легко судить о свойствах выпуклой топологии, оперируя лишь с приведенным семейством открытых множеств.

Введем понятие сходимости элементов и понятие ограниченного множества.

Мы будем говорить, что последовательность x_n точек пространства E сходится к точке x, если, какова бы ни была окрестность U точки x, начиная с некоторого $n=N$, все x_n принадлежат U.

Множество $G \subset E$ называется ограниченным, если, какова бы ни была последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ и последовательность x_n точек G, выполняется $\varepsilon_n x_n \to 0$ [(определение С. Банаха. См. ([5]), стр. 152)]. Для линейного топологического пространства [аксиомы 1—4, § 2] это определение может быть высказано в следующих терминах: G ограничено, если, какова бы ни была окрестность нуля U, существует положительное число a с $G \subset aU$ [определение Неймана, см. ([2]), стр. 7]. Наконец, когда E есть, кроме того, локально выпуклое пространство, это определение принимает следующую форму: G ограничено, если, какова бы ни была выпуклая окрестность нуля U, число $|G/U|$ конечно. Мы обозначаем здесь, как и всюду дальше,

$$|G/U| = \inf_{\substack{G \subset aU \\ a>0}} a \tag{5}$$

Это число — относительная норма множества G или символически «G, деленное на U», — может быть определено также и следующей формулой:

$$|G/U| = \sup_{x \in G} |x/U|. \tag{5-bis}$$

Установив все это, предположим, что в пространстве E определена выпуклая топология при помощи приведенного семейства F, удовлетворяющего условиям теоремы V.

Предположим, кроме того, чтобы упростить формулы, которые будут следовать, что каждое множество $U \in F$ принадлежит F вместе с обратным множеством $-U$; это сводится к тому, что мы соединяем семейства F и $-F$. Мы прибегаем к этому дополнительному предположению оттого, что оно дает нам возможность представить базу (4) открытых множеств, не пользуясь отрицательными h_i.

При этих условиях может быть доказана

ТЕОРЕМА VI. *Система множеств вида*

$$\alpha P(U_1, U_2, \ldots, U_n), \tag{6}$$

где $\alpha > 0$ *и* $U_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, *представляет полную систему окрестностей нуля, т. е. каждая окрестность нуля содержит множество вида* (6).

Доказательство. Произвольно взятая окрестность нуля с необходимостью содержит, как мы это заметили выше, окрестность нуля вида (4):

$$P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n), \qquad \text{где } h_i > 0,\ U_i \in F,\ x_i \in E.$$

Рассмотрим величину $|P(U_1, \ldots, U_n) / P(x_1 + h_1U_1, \ldots)|$, определенную формулами (5). Покажем, что эта величина конечна. В самом деле, конечна она или нет, мы можем написать

$$|P(U_1, \ldots, U_n) / P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n| =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |P(U_1, \ldots, U_n) / x_i + h_iU_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |U_i / h_i + h_iU_i| =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{h_i} \left| U_i / U_i + \frac{x_i}{h_i} \right| \leqslant,$$

используя аксиому треугольника,

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{h_i} \left[\left| U_i + \frac{x_i}{h_i} / U_i + \frac{x_i}{h_i} \right| + \left| -\frac{x_i}{h_i} / U_i + \frac{x_i}{h_i} \right| \right] =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{h_i} \left[1 + \left| -\frac{x_i}{h_i} / U_i + \frac{x_i}{h_i} \right| \right].$$

Последняя в этой цепи величина явным образом конечна и, следовательно,

$$|P(U_1, \ldots, U_n) / P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n)| = a < \infty.$$

Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{a}$. Тогда

$$\alpha P(U_1, \ldots, U_n) \subset P(x_1 + h_1U_1, \ldots, x_n + h_nU_n),$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема имеет некоторые следствия, достойные упоминания.

Следствие 1. *Для того чтобы* $x_n \to 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $|x_n / U| \to 0$, *каково бы ни было* $U \in F$.

Необходимость очевидна, что же касается достаточности, она вытекает из того факта, что

$$|x_n / \alpha P(U_1, \ldots, U_\nu)| = \frac{1}{\alpha} \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} |x_n / U_i|.$$

Следствие 2. *Для того чтобы* $G \subset E$ *было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы* $|G / U| < \infty$, *каково бы ни было* $U \in F$.

В самом деле, надо только прибегнуть к формуле

$$|G / \alpha P(U_1, \ldots, U_n)| = \frac{1}{\alpha} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |G / U_i|.$$

Предположим теперь, что в пространстве E определена топология при помощи приведенного семейства, которое содержит лишь конечное

число выпуклых окружений нуля открытым образом: $U_1, U_2, \ldots, U_m$ таких, что множество $P(U_1, \ldots, U_m)$ окружает нуль конечным образом.

Тогда пространство E есть нормированное пространство. В самом деле, добавим к приведенному семейству множества $-U_1, -U_2, \ldots, -U_m$. Новое приведенное семейство удовлетворяет очевидно условиям теоремы VI. Применяя следствие 2 этой теоремы, видим, что множество $P(U_1, -U_1, \ldots, U_m, -U_m)$ представляет собой выпуклую и ограниченную окрестность нуля. Следовательно, вследствие известной теоремы Колмогорова [(6), стр. 30], E есть нормированное пространство.

Этот факт мы могли бы легко установить и непосредственно, не пользуясь теоремой Колмогорова. В качестве нормы элемента x возьмем величину

$$|x| = |x / P(U_1, -U_1, \ldots, U_m, -U_m)|. \qquad (7)$$

Определенная таким образом норма превращает E в нормированное пространство. Действительно: так как «знаменатель» в правой части (7) окружает нуль конечным образом, мы имеем $|x| > 0$ для $x \neq 0$; так как этот «знаменатель» симметричен относительно нуля, $|ax| = |a| \cdot |x|$; аксиома треугольника всегда верна для относительной нормы (см. 5°, § 1). Наконец, установим эквивалентность топологии по норме (7) и исходной топологии пространства E, порожденной приведенным семейством F.

Пусть V есть некоторое открытое множество пространства E. Докажем, что оно будет открытое и в смысле топологии по норме (7). Для этого надо доказать, что любую точку $x_0 \in V$ можно окружить сферой $\underset{x}{\mathcal{E}}(|x - x_0| < \delta)$, целиком лежащей в V. Но, согласно теореме VI, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\delta P(U_1, -U_1, \ldots, U_m, -U_m) \subset V - x_0.$$

Это число δ и есть искомое. В самом деле, по (7)

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|x - x_0| < \delta) = x_0 + \delta P(U_1, -U_1, \ldots, U_m, -U_m) \subset V.$$

Пусть, наоборот, W есть множество, открытое в смысле топологии (7). Оно будет открытое и в смысле исходной топологии пространства E, потому что каждую точку множества W можно окружить некоторой сферой $\underset{x}{\mathcal{E}}(|x - x_0| < \delta)$, а всякая такая сфера есть, как мы только что видели, множество, открытое в смысле исходной топологии.

Мы видели в § 1, что в пространстве E всегда существуют окружения выпуклые конечные и окружения открытым образом. Взяв одно какое-нибудь из них в качестве приведенного семейства, мы превратим линейное пространство E в нормированное пространство. Но можно ли утверждать, что это будет пространство типа (B)? [Пространство типа (B) — это пространство нормированное и полное; [см. (1), стр. 53]. Оказывается, утверждать этого нельзя.

Рассмотрим, например, базу Хамеля линейного пространства E и множество K, определенное в § 1 и представляющее собой выпук-

лое окружение нуля в E открытым и конечным образом. Приведенное семейство, состоящее из одного единственного множества K, определяет в E топологию, с которой E есть нормированное пространство. Так как K симметрично по отношению к точке нуль, то можно положить

$$|x| = |x/K| = \text{максимум абсолютных значений координат точки } x. \tag{8}$$

Если рассматриваемая база Хамеля конечна ($\Xi < \omega$), иными словами, E имеет конечное число измерений, пространство E явным образом типа (B) с нормой (8). Но если $\Xi \geqslant \omega$, пространство E не полно с нормой (8).

В самом деле, рассмотрим последовательность

$$y_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} x_\nu,$$

где x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) являются элементами рассматриваемой базы Хамеля.

В силу (8) мы имеем $|y_n - y_{n+p}| = \frac{1}{n+1}$, значит, последовательность y_n сходится в себе. Но она не сходящаяся: каково бы ни было $x \in E$, среди x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) есть элемент x_μ, не участвующий в представлении x при помощи x_ξ. Поэтому для $n > \mu$ $|x - y_n| \geqslant \frac{1}{\mu}$, и последовательность y_n не сходится к x.

Предположим, что приведенное семейство в E есть исчислимое семейство выпуклых окружений нуля открытым образом U_i ($i = 1, 2, \ldots$) таких, что $P(U_1, \ldots)$ не содержат ни одного бесконечного луча. Пространство E есть тогда метрическое пространство. В самом деле, система множеств вида $\frac{1}{n} P(U_1, -U_1, \ldots, U_n, -U_n)$ есть фундаментальная система окрестностей нуля. Она исчислима. Существование подобной системы («первая аксиома счетности» удовлетворена) есть необходимое и достаточное условие того, чтобы пространство E было метризуемо, как это показал Гаррет Биркхофф [(7), стр. 428]. Итак, E есть локально выпуклое метрическое пространство. Отсюда следует, что оно есть пространство B_0-метрическое. Под последним мы понимаем, что E удовлетворяет всем аксиомам пространства типа (B_0), кроме, может быть, свойства быть полным (определение пространства типа (B_0) см. в [(8), стр. 140)].

Докажем это последнее утверждение, не пользуясь теоремой Г. Биркхоффа.

Мы замечаем, прежде всего, что метрическая функция

$$\rho(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x/P(U_n, -U_n)|}{1 + |x/P(U_n, -U_n)|} \tag{9}$$

с дополнительным условием: $\rho(x, y) = \rho(0, x - y)$, определяет в E B_0-метрику. Докажем, что топология (9) эквивалентна исходной топологии пространства E, определенной семейством F.

Пусть V есть множество, открытое в смысле исходной топологии пространства E. Докажем, что оно будет открытое и в смысле топологии (9).

Возьмем любое $x_0 \in V$. Согласно теореме VI, существует такое $\delta > 0$ и натуральное N, что

$$\delta P(U_1, -U_1, \ldots, U_N, -U_N) \subset V - x_0. \tag{10}$$

Я утверждаю, что

$$\mathop{\mathscr{E}}_{x}\left(\rho(x, x_0) < \frac{\delta}{2^N(1+\delta)}\right) \subset x_0 + \delta P(U_1, \ldots, -U_N). \tag{11}$$

В самом деле, из того факта, что $\rho(x, x_0) < \frac{\delta}{2^N(1+\delta)}$, следует по формуле (9)

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x - x_0 / P(U_n, -U_n)|}{1 + |x - x_0 / P(U_n, -U_n)|} < \frac{\delta}{2^N(1+\delta)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

откуда

$$\frac{|x - x_0 / P(U_n, -U_n)|}{1 + |x - x_0 / P(U_n, -U_n)|} < \frac{\delta}{1+\delta}$$

при $n = 1, 2, \ldots, N$.

Но функция $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ монотонно возрастающая, когда $t > -1$, а потому из последнего неравенства мы заключаем, что

$$|x - x_0 / P(U_n, -U_n)| < \delta \quad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

Это значит, что $x - x_0 \in \delta P(U_1, -U_1, \ldots, U_N, -U_N)$.

Соотношение (11), таким образом, доказано. В соединении с (10) оно убеждает нас в том, что любую точку множества V можно, не выходя из множества V, окружить некоторой окрестностью в смысле топологии (9). Итак, множество V открыто и в смысле этой последней.

Пусть, наоборот, W есть множество, открытое в смысле топологии (9). Возьмем любую точку $x_0 \in W$. Существует натуральное N такое, что

$$\mathop{\mathscr{E}}_{x}\left(\rho(x, x_0) < \frac{1}{2^N}\right) \subset W.$$

Я утверждаю, что

$$x_0 + \frac{1}{2^{N+1}} P(U_1, -U_1, \ldots, U_N, -U_{N+1}, -U_{N+1}) \subset \mathop{\mathscr{E}}_{x}\left(\rho(x, x_0) < \frac{1}{2^N}\right). \tag{12}$$

В самом деле, пусть $x \in x_0 + \frac{1}{2^{N+1}} P(U_1, \ldots, U_{N+1})$. Тогда

$$|x - x_0 / P(U_n, -U_n)| < \frac{1}{2^{N+1}} \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, N, \ N+1,$$

а потому

$$\rho(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x - x_0 / P(U_n, -U_n)|}{1 + |x - x_0 / P(U_n, -U_n)|} <$$

$$< \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{N+1}} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^N}.$$

Соотношение (12), таким образом, доказано. Оно убеждает нас, что каждую точку множества W можно, оставаясь в множестве W, окружить некоторой окрестностью в смысле исходной топологии, порожденной приведенным семейством F. Итак, множество W открыто и в смысле этой последней.

Эквивалентность обеих топологий теперь полностью установлена.

Глава 2

Окружения в линейном топологическом пространстве

В главе 1 мы рассматривали окружения как аппарат для эффективного определения в линейном пространстве топологии. В этой главе мы будем рассматривать выпуклые окружения в пространстве с данной нам топологией. Таким образом, рассматриваемые нами окружения могут и не быть окрестностями, т. е. могут являться «чуждыми» топологии своего пространства.

Пространство E будет в этой главе линейное топологическое.

§ 1. Замыкание выпуклого окружения

Замкнутым множеством мы будем называть такое множество точек из E, дополнение которого открыто. Кроме того, все пространство E будет замкнутым.

Отметим некоторые свойства замкнутых множеств.

Из аксиомы 1 следует, что пересечение замкнутых множеств или же соединение их в конечном числе дает снова замкнутое множество. Далее, перенос или подобное преобразование не нарушают замкнутости множества. Из аксиомы 2 следует, что множество, состоящее из одной точки, всегда замкнуто, следовательно, множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто. Пользуясь линейностью топологии, можно доказать, что множество G не может быть одновременно и замкнутым и открытым, если G не пустое и не совпадает со всем пространством E.

Пусть $G \subset E$ любое множество точек. Рассмотрим множество

$$\overline{G} = P(\ldots, F, \ldots), \ G \subset F, \ F \text{ замкнуто}. \qquad (1)$$

Множество $\overline{G}$ называется замыканием множества G. Легко видеть, что замыкание G есть наименьшее замкнутое множество, содержащее G.

Далее будем называть точкой прикосновения множества G точку $x_0 \in E$, обладающую свойством: в любой окрестности точки x_0 есть точки множества G.

Замыкание G может быть теперь вторично определено как множество точек прикосновения G. Легко доказать, что это второе определение эквивалентно первому.

Мы имеем в виду установить некоторые факты, относящиеся к замыканиям окружений. Заметим, что для линейного топологического пространства остается верным обстоятельство, установленное нами для локально выпуклого пространства в главе 1 при доказательстве теоремы IV: выпуклая окрестность нуля окружает нуль открытым образом. Доказательство, данное в главе 1, остается в силе.

Вспомним обозначение (5) главы 1. Если U есть некоторое выпуклое окружение нуля, отличное от всего пространства E, то легко можно увидеть, что $|U/U|=1$. С другой стороны $|E/E|=0$. Докажем теперь следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. *Если U — выпуклая окрестность нуля в E, отличная от всего пространства, то*

$$|\overline{U}/U|=1. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $U\subset\overline{U}$, то $|\overline{U}/U|\geqslant|U/U|=1$. Для того чтобы доказать теорему, остается показать, что для любой точки $x_0\in\overline{U}$ выполняется $|x_0/U|\leqslant 1$. Предположим, что точка x_0 обладает свойством

$$|x_0/U|=1+\delta, \qquad \delta>0. \tag{3}$$

Множество $x_0-\delta U$ есть окрестность точки x_0. Возьмем любое $x\in x_0-\delta U$ и оценим снизу $|x/U|$. Мы имеем по аксиоме треугольника

$$|x/U|\geqslant|x_0/U|-|x_0-x/U|. \tag{4}$$

Но вследствие нашего выбора точки x имеем $x_0-x\in\delta U$. Так как δU окружает нуль открытым образом, то $|x_0-x/U|<\delta$. Вследствие (3) мы можем теперь усилить неравенство (4)

$$|x/U|>(1+\delta)-\delta,$$

откуда следует, что $x\operatorname{non}\in U$. Итак, в множестве $x_0-\delta U$ нет точек U. Точка x_0 не является, таким образом, точкой прикосновения U. Следовательно, $x_0\operatorname{non}\in\overline{U}$, и формула (2) доказана.

Из теоремы I непосредственно следует

Замечание 1. Если U — выпуклая окрестность нуля, то

$$\overline{U}=\underset{x}{\mathscr{E}}(|x/U|\leqslant 1).$$

Доказательство. В том случае, когда в качестве U взято все E, замечание тривиально. Пусть теперь U отличается от E. Из теоремы I вытекает, что

$$\overline{U}\subset\underset{x}{\mathscr{E}}(|x/U|\leqslant 1).$$

Но любая точка x_0 с $|x_0/U| \leqslant 1$ есть точка прикосновения для множества hx_0, $0 < h \leqslant 1$, как это немедленно следует из аксиомы 4, § 2, а потому

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| \leqslant 1) \subset \bar{U},$$

и наше замечание доказано.

Предположим, что в E определен функционал $f(x)$. Этот функционал называется непрерывным, если для любых вещественных a и b, $a < b$, множество $\underset{x}{\mathcal{E}}(a < f(x) < b)$ (прообраз интервала $a < t < b$) или открыто или пусто.

Сумма и произведение двух непрерывных функционалов есть, как нетрудно доказать, снова непрерывный функционал.

Из непрерывности $f(x)$ следует, что $x_n \to x$ влечет $f(x) \to f(x)$, но надо полагать, что обратное не всегда имеет место.

Функционал аддитивный, т. е. такой, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$, каковы бы ни были x, $y \in E$, и непрерывный называется линейным.

Замечание 2. Если U — выпуклая окрестность нуля, то функционал $|x/U|$ непрерывен.

Доказательство. Если $a < 0$ и $b \leqslant 0$, то $\underset{x}{\mathcal{E}}(a < |x/U| < b)$ пусто.

Если $a \leqslant 0$, но $b > 0$, то

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(a < |x/U| < b) = \underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| < b) = bU.$$

Остается рассмотреть случай, когда $0 < a < b$. Тогда

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(a < |x/U| < b) = P(\underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| < b), \underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| > a)) = \\ = P(bU, \underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| > a)).$$

Докажем, что $\underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| > a)$ открыто. Но это множество имеет дополнением

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| \leqslant a) = \underset{x}{\mathcal{E}}(|x/aU| \leqslant 1) = a\bar{U}$$

(согласно замечанию 1), а последнее множество замкнуто. Следовательно, само $\underset{x}{\mathcal{E}}(|x/U| > a)$ открыто, а вместе с ним открыто и $\underset{x}{\mathcal{E}}(|a < |x/U| < b)$. Замечание 2 доказано.

Перед тем как итти дальше, нам необходимо ввести новое понятие. Говорят, что множество $G \subset E$ «плотно» в множестве $U \subset E$, если $U \subset \bar{G}$. Далее G «всюду плотно в E», если $\bar{G} = E$. G нигде не плотно, если оно не плотно ни в каком открытом множестве.

Говорят, что пространство E I категории, если оно есть соединение последовательности нигде не плотных множеств G_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

В противном случае E II категории.

Все эти термины общеприняты. Отметим, что, например, всякое полное метрическое пространство — II категории [см. например ([1]), стр. 14].

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА II. *Если E — линейное топологическое пространство II категории, а U — выпуклое окружение нуля открытым образом, то возможно лишь два случая: либо $|\overline{U}/U| = \infty$, либо U открыто.*

Доказательство. Предположим, что

$$|\overline{U}/U| < \infty, \tag{5}$$

и докажем, что U открыто.

Возьмем любую точку $x_0 \in U$ и установим, что существует окрестность нуля V_0 со свойством

$$x_0 + V_0 \subset U. \tag{6}$$

Итак, пусть $x_0 \in U$. Положим

$$U - x_0 = U_0. \tag{7}$$

Согласно теореме II главы 1, U_0 окружает нуль открытым образом. Оценим $|\overline{U}_0/U_0|$. Мы имеем, во-первых,

$$\overline{U}_0 = \overline{U}_1 - x_0,$$

откуда

$$|\overline{U}_0/U_0| = |\overline{U} - x_0/U_0| \leqslant |\overline{U}/U - x_0| + |-x_0/U - x_0|.$$

Применяя формулу (3) главы 1 к величине $|\overline{U}/U - x_0|$, мы получим

$$|\overline{U}/U - x_0| \leqslant \frac{|\overline{U}/U|}{1 - |x_0/U|}.$$

Мы видим теперь, что величина $|U_0/U_0| = r_0$ есть величина конечная.

Далее, имеет место соотношение

$$E = S(U_0, 2U_0, \ldots, nU_0, \ldots).$$

В самом деле, каково бы ни было $x \in E$, соотношение $x \in nU_0$ выполняется, лишь только $n > |x/U_0|$.

Так как E II категории, то должно существовать такое открытое множество V и натуральное число n_0, что

$$V \subset n_0\overline{U}_0.$$

Пусть x_1 — некоторая точка из открытого множества V. Множество $V - x_1$ будет окрестностью нуля. Обозначим его через V_1. Мы имеем

$$V_1 = V - x_1 \subset n_0\overline{U}_0 - x_1,$$

откуда

$$|V_1/U_0| \leqslant |n_0\overline{U}_0 - x_1/U_0| \leqslant n_0 r_0 + |-x_1/U_0| < r_1,$$

где r_1 — некоторое конечное положительное число. Из последнего неравенства следует, что

$$V_1 \subset r_1 U_0$$

или, обозначая через V_0 множество $\frac{1}{r_1} V_1$,

$$V_0 \subset U_0.$$

Но V_0 есть некоторая окрестность нуля. Согласно (7) мы можем написать

$$V_0 \subset U - x_0,$$

а это есть не что иное, как соотношение (6), доказывающее, ввиду произвольности точки $x_0 \in U$, что U — открытое множество. Теорема доказана.

Эта важная теорема позволяет выяснить природу выпуклых окружений в линейных топологических пространствах II категории. Итак, во всех дальнейших теоремах настоящей главы E обозначает линейное топологическое пространство II категории.

ТЕОРЕМА III. *В пространстве E всякое выпуклое окружение нуля U плотно в некоторой выпуклой окрестности нуля V, причем*

$$\overline{U} = \overline{V}. \tag{8}$$

Доказательство. Вследствие $U \subset \overline{U}$ мы видим, что $\overline{U}$ есть окружение нуля. Из линейности топологии, определенной в E, следует, что $\overline{U}$ выпукло вместе с U [см. ([2]), стр. 10]. Введем теперь множество

$$V = \underset{x}{\mathcal{E}} \left(|x/\overline{U}| < 1 \right). \tag{9}$$

Это есть выпуклое окружение нуля открытым образом. Далее, легко видеть, что

$$|x/V| = |x/\overline{U}|. \tag{10}$$

Из формулы (9) вытекает, что $V \subset \overline{U}$, а, следовательно, и $\overline{V} \subset \overline{U}$. Чтобы доказать (8), достаточно рассмотреть только те точки $\overline{U}$, для которых $|x/\overline{U}| = 1$. Для всякой такой точки $|x/V| = 1$, а потому такая точка является точкой прикосновения для множества точек hx с $0 < h < 1$ и значит $x \in \overline{V}$. Формула (8), таким образом, установлена. Равенство (10) дает нам теперь, что

$$|\overline{V}/V| = |\overline{V}/\overline{U}| = |\overline{U}/\overline{U}| = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{U} \neq E, \\ 0, & \text{если } \overline{U} = E. \end{cases}$$

Применяя теорему II, мы видим, что V открыто. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА IV. *Если в пространстве E существует выпуклое и ограниченное окружение, то E нормируемо.*

Доказательство. Пусть U — выпуклое и ограниченное окружение в E.

Можно предполагать, что U есть окружение нуля, потому что мы можем всегда добиться этого путем переноса множества U, что не нарушит ни выпуклости его, ни ограниченности. Вместе с U будет ограниченной и $\overline{U}$ [доказательство см., например, в ([2]), стр. 9]. Согласно теореме III существует выпуклая окрестность нуля $V \subset \overline{U} = \overline{V}$. Следовательно, V ограничено. Но тогда, по уже цитированной теореме Колмогорова из ([6]), стр. 30, E есть нормированное пространство.

Таким образом, за счет требования, чтобы E было II категории, мы получили существенное усиление этой теоремы Колмогорова.

Как мы видели, в любом линейном пространстве существует конечное выпуклое окружение нуля. В пространстве ненормируемом и

II категории такое конечное выпуклое окружение будет обязательно неограниченным. С другой стороны, легко видеть, что в линейном топологическом пространстве из ограниченности выпуклого окружения следует его конечность.

Итак, понятие «конечного окружения нуля» существенно шире, нежели понятие ограниченного окружения нуля. Мы увидим в дальнейшем, что в ненормируемом пространстве может существовать даже конечная, т. е. окружающая нуль конечным образом, выпуклая окрестность нуля (это не следует непосредственно из теоремы III, потому что замыкание конечного выпуклого окружения в линейном топологическом пространстве отнюдь не всегда конечное выпуклое окружение). Итак, понятие конечной окрестности существенно шире понятия ограниченной окрестности.

Введем теперь один новый термин: мы будем говорить, что линейное топологическое пространство E нигде не выпукло, если единственное выпуклое открытое множество в E есть все пространство E.

Утверждение, что данное пространство E нигде не выпукло, эквивалентно утверждению, что в E не существует линейного функционала, отличного от тождественного нуля. Сейчас я не буду останавливаться на доказательстве этого.

ТЕОРЕМА V. *В нигде не выпуклом пространстве E всякое выпуклое окружение везде плотно.*

Доказательство. Пусть U — выпуклое окружение нуля в E. Согласно теореме III, существует выпуклая окрестность нуля V такая, что $\overline{U}=\overline{V}$. По определению нигде не выпуклого пространства, заключаем, что $V=E$ и $\overline{U}=E$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы виден и тот факт, что замыкание конечного окружения может не быть конечным. Примером является любое конечное выпуклое окружение в нигде не выпуклом пространстве II категории.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть E нигде не выпукло, и $f(x)$ есть дистрибутивный функционал* в E, не равный тождественно нулю. Тогда $f(x)$ принимает в любой окрестности любой точки значения, сколь угодно близкие к любому числу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$таково, что $f(x_0) \neq 0$.

Надо доказать, что множество

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)-a|<\varepsilon)$$

везде плотно в E, каковы бы ни были числа a и $\varepsilon>0$. Но это множество есть, как легко видеть, выпуклое окружение точки $x_1 = \frac{a}{f(x_0)} x_0$, для которой $f(x_1)=a$.

По теореме V, рассматриваемое множество везде плотно, что и требовалось доказать.

---

* Так называют функционал, удовлетворяющий условию $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$, каковы бы ни были вещественные числа a, b и элементы пространства x, y.

§ 2. Конкретные примеры: пространства S, l^p, L^p.

В этом параграфе мы укажем некоторые метрические пространства, где могут быть применены предшествующие теоремы.

Пространство S. Рассмотрим пространство S измеримых функций $x(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$ с обычной метрикой — см. ([1]), стр. 9. Именно, мы полагаем $\rho(x-y) = \rho(x-y, 0)$ и

$$\rho(x, 0) = \int_0^1 \frac{|x(t)|\,dt}{1+|x(t)|}.$$

Пространство S есть пространство типа (F) [см. ([1]), стр. 35]. Сходимость элементов S есть сходимость измеримых функций по мере [([1]), стр. 10]. Но пространство типа (F) есть, как нетрудно показать, линейное топологическое пространство II категории [см., например, Д. Хайерс ([9]), стр. 79]. Кроме того, пространство S нигде не выпуклое. Это следует из того, что в нем нет отличного от нуля линейного функционала [([1]), стр. 234], но мы сейчас докажем это непосредственно.

Предположим, что $U \subset S$ есть выпуклая окрестность нуля в S. Докажем, что $U = S$ или, иными словами, что относительная норма $|x/U| = 0$ тождественно в S.

Возьмем любое $x \in S$, $x = x(t)$.

Введем функции $x_k^n(t)$:

$$x_k^n(t) = \begin{cases} nx(t) & \text{в} \quad \left(\frac{k-1}{n} \leqslant t < \frac{k}{n}\right), \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \tag{11}$$

Мы имеем $x = \frac{1}{n}(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n)$. Следовательно,

$$|x/U| \leqslant \frac{1}{n}\left[|x_1^n/U| + \cdots + |x_n^n/U|\right] \leqslant |x_{k_n}^n/U|, \tag{12}$$

где k_n обозначает то значение индекса k, которое доставляет, при фиксированном n, максимум величине $|x_k^n/U|$, когда $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь $n \to \infty$. Тогда $x_{k_n}^n \to 0$. В самом деле, мера $\underset{t}{\mathcal{E}}(x_k^n(t) \neq 0)$ равна $\frac{1}{n}$ и, значит, $x_{k_n}^n(t) \to 0$ по мере.

Вследствие непрерывности относительной нормы с открытым «знаменателем» (замечание 2 к теореме I главы 2) мы заключаем теперь, что $|x_{k_n}^n/U| \to 0$, и неравенство (12) дает нам $|x/U| = 0$, что и требовалось доказать.

Пространства l^p и L^p. Рассмотрим теперь пространство l^p последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, суммируемых с p-й степенью,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty,$$

и пространство L^p функций $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, p-я степень которых суммируема,

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

Сложение элементов и умножение элемента на вещественное число определяем естественным образом. Кроме того, в пространстве L^p мы условимся не различать между собой функций, отличающихся друг от друга на множестве значений t меры нуль.

Введем в этих пространствах метрику, положив $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$, и далее, в пространстве l^p

$$\rho(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p, \tag{13}$$

и в пространстве L^p

$$\rho(x, 0) = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt. \tag{14}$$

Если $p \geqslant 1$, то пространства l^p и L^p, таким образом топологизированные, являются, как хорошо известно, пространствами типа (B), причем принимают $|x| = \sqrt[p]{\rho(x, 0)}$ [см. ([1]), стр. 12].

Если же $0 < p < 1$, то эти пространства будут типа (F). В самом деле, аксиома треугольника для метрических функций (13) и (14) сразу следует из того, что при $0 < p < 1$

$$|a + b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p.$$

Далее, для метрических функций (13) и (14) мы имеем

$$\rho(ax, 0) = |a|^p \rho(x, 0),$$

откуда следует выполнение двух других аксиом пространства типа (F): если ε_n — вещественные числа, $\varepsilon_n \to 0$, а $x \in l^p$ или L^p, то $\rho(\varepsilon_n x, 0) = |\varepsilon_n|^p \rho(x, 0) \to 0$; если $x_n \in r^p$ или L^p, $x_n \to 0$, а h — вещественное число, то $\rho(h x_n, 0) = |h|^p \rho(x_n, 0) \to 0$.

Наконец, доказательство полноты пространств l^p и L^p, проводимое обычно для $p \geqslant 1$ [см. например, ([10]), стр. 84], может быть перенесено без изменений и на рассматриваемый нами случай.

Итак, пространство l^p с метрикой (13) и L^p с метрикой (14) — это пространства типа (F). Следовательно, они линейные топологические II категории. Отметим кстати, что они локально ограниченные, т. е. содержат ограниченные открытые множества, например, $\underset{x}{\mathcal{E}}(\rho(x, 0) < 1)$.

Пространство $l^p (0 < p < 1)$ не локально выпукло. Доказательство этого может быть проведено вполне аналогично тихоновскому доказа-

тельству того, что $l^{\frac{1}{2}}$ не локально выпукло [(3), стр. 768]. Что касается пространства $L^p (0 < p < 1)$, то оно не только не локально выпукло, но даже нигде не выпукло. Докажем это.

Пусть U — выпуклая окрестность нуля в L^p. Докажем, что относительная норма $|x/U| = 0$ тождественно в L^p. Согласно замечанию 2, функционал $|x/U|$ непрерывен. Так как множество M измеримых функций $x(t)$, ограниченных на интервале (0,1), плотно в L^p, то достаточно доказать, что $|x/U| = 0$ для $x \in M$.

Итак, пусть $x \in M$, т. е.

$$|x(t)| \leqslant A \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{15}$$

Введем функции $x_k^n(t)$ при помощи формул (11). Так же как и раньше, мы будем иметь

$$|x/U| \leqslant |x_{k_n}^n/U|, \tag{16}$$

причем число k_n определено для любого $n = 1, 2, \ldots$ и $1 \leqslant k_n \leqslant n$. Докажем, что $x_{k_n}^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Согласно (14) и (11)

$$\rho(x_{k_n}^n, 0) = \int_0^1 |x_{k_n}^n(t)|^p \, dt = \int_{\frac{k_n-1}{n}}^{\frac{k_n}{n}} |nx(t)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant [\text{согласно (15)}] \leqslant n^p A^p \int_{\frac{k_n-1}{n}}^{\frac{k_n}{n}} dt = \frac{A}{n^{1-p}}.$$

Мы видим, что $\rho(x_{k_n}^n, 0) \to 0$ при $n \to \infty$. Непрерывность относительной нормы убеждает нас, что $|x_{k_n}^n / U| \to 0$. Наконец, неравенство (16) влечет теперь $|x/U| = 0$, что и требовалось доказать.

Отсюда, между прочим, непосредственно следует, что в пространстве L^p, так же, как и в S, нет линейного функционала, отличного от тождественного нуля. Более того, всякий дистрибутивный функционал в этих пространствах, отличный от нуля, ведет себя в окрестности любой точки так, как функция комплексного переменного ведет себя в окрестности своей существенно особой точки (теорема VI).

Установив, что L^p нигде не выпукло, мы полностью разрешили вопрос о выпуклых открытых множествах в пространстве L^p. Обращаясь с этим же вопросом к рассмотрению пространства l^p, мы вспомним, во-первых, что выпуклых и ограниченных окрестностей мы в нем не найдем, хотя невыпуклые ограниченные окрестности в нем имеются. Однако в этом пространстве существуют выпуклые и конечные окрестности, т. е. окружающие любую свою точку конечным образом. В качестве примера можно взять множество точек $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из l^p, обладающих свойством

$$\max_n |\xi_n| < 1.$$

Прежде всего очевидно, что множество W, определенное таким обра-

зом, есть выпуклое окружение нуля в l^p открытым образом. *В* самом деле, мы имеем для любого $x=(\xi_1, \xi, \ldots)\in l^p$

$$|x/W| = \max_i |\xi_i| < \infty. \qquad (17)$$

Докажем, что

$$\overline{W} = \mathop{\mathscr{E}}_x (|x/W| \leqslant 1). \qquad (18)$$

Очевидно достаточно доказать, что $\overline{W} \subset \mathop{\mathscr{E}}_x (|x/W| \leqslant 1)$. Итак, пусть $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)\in\overline{W}$. Пространство l^p метрическое, а потому x, как точка прикосновения W, есть предел сходящейся последовательности точек $x_n=(\xi_{1n}, \xi_{2n}\ldots)\in W$. По определению W

$$|\xi_{in}| < 1 \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots \\ n=1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Очевидно далее, что из $x_n \to x$ следует

$$\xi_{in} \to \xi_i \text{ при } n\to\infty \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Итак, $|\xi_i| \leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots)$ и, согласно (17), $|x/W| \leqslant 1$; формула (18) установлена. Из (18) вытекает, что $|\overline{W}/W| = 1$. Применяя теорему II к W, мы убеждаемся, что W открыто. Наконец, формула (17) доказывает, что выпуклая окрестность нуля W конечна.

На этом мы закончим изучение окружений.

ПРИМЕЧАНИЯ К ЧАСТИ ПЕРВОЙ

Глава 2

§ 1. Теорему, эквивалентную теореме III, доказал для пространств типа (B) И. М. Гельфанд [см. ([11]), замечание на стр. 241].

§ 2. Тот факт, что понятие конечного открытого множества существенно шире понятия ограниченного открытого множества, наталкивает на мысль ввести понятие локально конечного пространства.

Будем называть множество точек U линейного топологического пространства E конечным относительно нуля, если для любого $x\in E$, $x\neq 0$, существует $a>0$ такое, что $h>a$ влечет $hx \operatorname{non}\in U$. Так понятие «конечности» распространено на невыпуклые множества.

Пространство E называется локально конечным, если в нем есть окрестность нуля U, конечная относительно нуля. Тогда и любая окрестность нуля V содержит окрестность нуля, конечную относительно нуля, именно $P(U, V)$.

Для локально конечного линейного топологического пространства выполнена аксиома 2 Неймана из ([2]), о которой мы говорили выше. Поэтому такое пространство есть линейное топологическое пространство в смысле Неймана.

Пространства S и s не локально конечны.

Пусть l^0 — пересечение всех пространств l^p $(p>0)$, т. е. множество числовых последовательностей $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, для каждой из которых

$$|x|_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[n]{|\xi_i|} < \infty,$$

каково бы ни было $n = 1, 2, \ldots$ Метризуем пространство l^0 при помощи метрической функции

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x|_n}{1 + |x|_n}.$$

Тогда пространство l^0 есть пространство типа (F), которое локально конечно, не локально выпукло, не локально ограничено и в котором существует конечная выпуклая окрестность нуля, например,

$$W = \mathop{\mathcal{E}}_{x} (\max_{1} |\xi_i| < 1).$$

Идея метризации пространств L^p и l^p при $0 < p < 1$ с помощью формул (13) и (14), сразу обеспечивающих в этом случае аксиому треугольника и все остальные аксиомы пространства типа (F), принадлежит Л. В. Канторовичу.

Поступило
18 II 1941

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Monografje Matematyczne. Warszawa 1932.
2. J. v. Neumann. On complete topological space. Trans. Am. Math. Soc., 37 (1935), 1—20.
3. A. Tychonoff. Ein Fixpunktsatz. Math. Ann., 111 (1935), 767—776.
4. I. v. Wehausen. Transformations in linear topological spaces. Duke Math. Journ., 4, (1938), 157—169.
5. S. Mazur and W. Orlicz. Über Folgen linearer Operationen. Studia Math., 4 (1933), 152—157.
6. A. Kolmogoroff. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math., 5 (1934), 29—33.
7. G. Birkhoff. A note on topological groups. Comp. Math., 3 (1936), 427—430.
8. M. Eidelheit. Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Studia Math., 6 (1936), 139—148.
9. D. Hyers. A note on linear topological spaces. Bull. Am. Math. Soc., 44 (1938), 76—80.
10. Люстерник. Основные понятия функционального анализа, Успехи мат. наук, вып. I (1938), 77—140.
11. I. Gelfand. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. Мат. Сб., 46 (1938), 235—284.

U. SIRVINT. CONVEX SETS AND LINEAR FUNCTIONALS IN AN ABSTRACT SPACE. PART I. CONVEX SETS

SUMMARY

This paper is divided in two parts. In the first part published here we shall study some geometrical properties of an abstract space, viz. the properties of the convex «surroundings» (see below) in a linear and a linear topological space. The facts stated here will find their application in the second part in the discussion of the linear functionals in a linear topological space. The results of this part of the work are published without prooves in C. R. Acad. Sci. URSS, XXVI, № 2 (1940).

Terminology and notations

E is a linear space [see ([1]), p. 26].

The intersection of sets $U, V, \ldots$ from E is denoted by

$$P(U, V, \ldots).$$

The set-theoretical «sum» of sets is called the junction of sets.

If $x_0 \in E$, $a \neq 0$ is a real number and $U \subset E$ then

$$U + x_0 = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = x' + x_0;\ x' \in U),$$

$$aU = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = ax';\ x' \in U).$$

The transformations $y = x + x_0$ and $y = ax$ of the space E in itself are called the translation of E and the homothetic.

Chapter 1

Convex topologisation of a linear space

§ 1. General theorems about surroundings

We shall say that a set $U \subset E$ is a surrounding of the element zero in E if for every $x \in E$ a positive number a can be chosen in a manner such that $h > a$ implies $x \in hU$. A set U will be called a surrounding of $x_0 \in E$ if $U - x_0$ is a surrounding of zero.

We shall also say if U is a surrounding of x_0 that U surrounds x_0 or that x_0 is surrounded by the set U. The greatest lower bound of the numbers a in the above definition will be denoted by $|x/U|$ and will be called a relative norm of x.

The surrounding of zero U being convex, the following properties of the relative norm are immediate [see ([2]), p. 18]

1° $0 \leqslant |x/U| < \infty$; 2° $|x/U| < 1$ implies $x \in U$; $|x/U| > 1$ implies x non $\in U$; 3° $|ax/bU| = \frac{a}{b}|x/U|$ if $\frac{a}{b} \geqslant 0$; 4° $|x/P(U,V)| = \max(|x/U|, |x/V|)$; 5° $|x+y/U| \leqslant |x/U| + |y/U|$.

If, moreover $|x/U| = 1$ implies x non $\in U$ then, we say, U surrounds zero in an open manner. If $|x/U| = 0$ implies $x = 0$ then U surrounds zero in a finite manner. The words: «U surrounds x_0 in an open (finite) manner» will signify that $U - x_0$ surrounds zero in an open (finite) manner.

The convex sets which surround zero in an open and finite manner exist in any linear space.

LEMMA. *Let U be a convex set which surrounds the element zero as well as x_0. Then, denoting for an arbitrary $x \in E$*

$$|x/U - x_0| = h,$$

we have

$$|x + hx_0/U| = h$$

and further

$$\frac{|x/U|}{1 + |-x_0/U|} \leqslant |x/U - x_0| \leqslant \frac{|x/U|}{1 - |x_0/U|}.$$

This lemma enables us to prove the following theorems.

THEOREM I. *Let U be a convex surrounding of zero. Then a necessary and sufficient condition for x_0 be surrounded by U is $|x_0/U| < 1$.*

THEOREM II. *If a convex set U surrounds one of its points in an open manner then U surrounds every its point in an open manner.*

THEOREM III. *If a convex set U surrounds one of its points in a finite manner then U surrounds in a finite manner every point which is surrounded by U.*

§ 2. Topologisation

The words «a topology is defined in E» signify that a family of subsets, which are called «open sets», is defined in E. An open set is also a neighbourhood of any its points.

A topology is called «convex» if E is a locally convex space [see ([3]), p. 768] with this topology.

THEOREM IV. *In order that a topology in E be convex it is necessary and sufficient that*

1° *the family of open sets be invariant with respect to the operations of junction; intersection in finite number; translation; homothetic.*

2° *whenever are two points x and $y \neq x$ of E there exists an open set U such that $x \in U$, y non $\in U$.*

3° *every neighbourhood of zero contains a convex neighbourhood of zero which surrounds zero in an open manner.*

Now consider a subfamily F of open sets in E. We shall say, F be a reduced family of open sets if each open set in E may be obtained proceeding from the family F by means of operations: homothetic, translation, intersection in finite number and junction.

THEOREM V. *In order that a topology in E be convex it is sufficient that the reduced family F satisfy the following conditions: every set $U \in F$ is a convex surrounding of zero in an open manner and besides to each $x \in E$, $x \neq 0$, corresponds an $U \in F$ with $|x/U| > 0$.*

§ 3. The topological properties

The notions of convergence of points and of boundness of sets are understood here in an ordinary sense [see ([2]) and ([6])].

A set U being a convex surrounding of zero and $G \subset E$, we denote

$$|G/U| = \text{g. l. b. } a; \quad G \subset aU, \quad a > 0.$$

This number may be defined also otherwise, namely

$$|G/U| = l.u.b. |x/U|; \quad x \in G.$$

THEOREM VI. *Let F be a reduced family of open sets which satisfies the conditions of Theorem V and moreover such that a set U always belongs to F together with $-U$. Then each neighbourhood of zero contains a neighbourhood of the form*

$$aP(U_1, \ldots, U_n),$$

where $a > 0$, $U_i \in F$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Corollary I. *For $x_n \to 0$ it is necessary and sufficient $|x_n/U| \to 0$, whenever $U \in F$.*

Corollary 2. *For $G \subset E$ be bounded it is necessary and suficient $|G/U| < \infty$, whenever $U \in F$.*

If the reduced family F from Theorem V is finite then E is a normed space. If E is enumerable, E is a B_0-metric space [see ([8]), p. 140].

Chapter 2

Convex surroundings in a topological space

In this chapter E denote a linear topological space [([6]), p. 29]. If $G \subset E$ then $\overline{G}$ is the closure of $\overline{G}$.

§ 1. The closure of a convex surrounding

THEOREM I. *If U is a convex neighbourhood of zero which differs from the whole space E then $|\overline{U}/U| = 1$.*

It is said, the space E is of the 1-st cathegory if E is derived from the junction of a sequence of sets $G_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ which are nowhere dense in E.

In the contrary case E is of the 2-d cathegory.

THEOREM II. *Let E be a linear topological space of the 2-d cathegory and U a convex surrounding of zero in an open manner. Then either $|\overline{U}/U| = \infty$ or U is open.*

THEOREM III. *In the space E of the* 2-d *cathegory every convex surrounding U of zero is dense in a certain neighbourhood V of zero and moreover*

$$\overline{U} = \overline{V},$$

THEOREM IV. *If in a space E of the* 2-d *cathegory there exists a convex bounded surrounding then E is a normed space.*

Definition. We shall say, the space E is nowhere convex, if its unic convex open set is the whole space E.

The fact that a space E is nowhere convex is equivalent to the absence of linear functionals which differ from identical zero in E.

THEOREM V. *In a nowhere convex space E of the* 2-d *cathegory any convex surrounding is everywhere dense.*

THEOREM VI. *Let E be nowhere convex of the* 2-d *cathegory and let $f(x)$ be a distributive functional in E which differs from the identical zero. Then $f(x)$ in any neighbourhood of any point takes the values which are arbitrarily near to each number.*

§ 2. Concrete examples

The spaces S, L^p, l^p [see ([1]), pp. 9, 12] with $0 < p < 1$ are of type (F), hence they are linear topological spaces of the 2-d cathegory [([9]), p. 79]. Moreover, S and L^p are nowhere convex. The space l^p is not locally convex, but in this space there exist convex neighbourhoods of zero which surround zero in a finite manner.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 171—188 Série mathématique

Ю. С. ОЧАН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В §§ 1 и 2 исследуются общие положения теории эквивалентности в смысле Szpilrajn ([1]) семейств множеств в абстрактных пространствах. В § 3 исследуется вопрос о неэквивалентности различных классов B-множеств.

§ 1. Кирпичи семейства множеств. Функция взаимоположения и ее приложения

Два семейства множеств $\{A_i\}$ и $\{B_k\}$ (индексы i и k пробегают для обоих семейств одно и то же множество R), расположенные соответственно в пространствах E_1 и E_2, называются эквивалентными, если пространство E_1 может быть преобразовано в E_2 взаимнооднозначно так, чтобы семейство $\{A_i\}$ перешло в семейство $\{B_k\}$ [Szpilrajn ([1])].

От взаимнооднозначного отображения, о котором здесь идет речь, не требуется никаких свойств непрерывности, измеримости и т. п. Таким образом, само понятие эквивалентности двух семейств множеств принадлежит к чистой теории множеств и, следовательно, не зависит от топологической природы пространства.

Поэтому в дальнейшем, если специально не будет оговорено противоположное, E_1 и E_2 будут обозначать совершенно произвольные множества одинаковой мощности (чаще всего мы будем их считать тождественно совпадающими и обозначать одной буквой E).

Если все множества обоих семейств попарно не пересекаются, то для их эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\varphi(i)$, взаимнооднозначно преобразующая R само в себя, чтобы $\overline{\overline{A_i}} = \overline{\overline{B_{\varphi(i)}}}$* для любого i и, кроме того, $\overline{\overline{E_1 - \sum_R A_i}} = \overline{\overline{E_2 - \sum_R B_k}}$. Однако в случае произвольного расположения множеств этих условий уже недостаточно.

Введем понятие кирпича семейства.

---

* $\overline{\overline{M}}$ означает мощность множества M.

Кирпичом с индексом $\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}$ — некоторое подмножество множества R) назовем множество

$$K_{\mathfrak{z}} = \prod_{i \in \mathfrak{z}} A_i \prod_{k \in \mathfrak{z}'} A'_k,$$

где A'_k означает дополнение A_k до всего пространства E, а $\mathfrak{z}' = R - \mathfrak{z}$.

Очевидны следующие три свойства кирпичей:

1) Все непустые кирпичи попарно без общих точек.

2) Все кирпичи в сумме (по всем $\mathfrak{z}$) составляют все пространство E.

3) Любое A_i может быть получено как сумма некоторого множества кирпичей, причем суммирование проводится по всем тем $\mathfrak{z}$, которые включают i.

Легко доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы система $\{A_i\}$ была эквивалентна системе $\{B_k\}$, необходимо и достаточно существование такой функции $\varphi(i)$, взаимнооднозначно преобразующей R само в себя, чтобы для любого множества $\mathfrak{z}$ индексов имело место*

$$\overline{\overline{K_{\mathfrak{z}}^{(A)}}} = \overline{\overline{K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)}}}$$

(индекс сверху указывает, к какой системе принадлежит данный кирпич).

Доказательство. Необходимость условия ясна. Действительно, если возможно установить эквивалентность между семействами, то это значит, что множеству A_i ставится в соответствие некоторое множество $B_{\varphi(i)}$ и множеству A'_k — некоторое множество $B'_{\varphi(k)}$. Но тогда

$$K_{\mathfrak{z}}^{(A)} = \prod_{i \in \mathfrak{z}} A_i \prod_{k \in \mathfrak{z}'} A'_k$$

перейдет в

$$\prod_{i \in \mathfrak{z}} B_{\varphi(i)} \prod_{k \in \mathfrak{z}'} B'_{\varphi(k)} = \prod_{i \in \varphi(\mathfrak{z})} B_i \prod_{k \in [\varphi(\mathfrak{z})]'} B'_k = K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)},$$

а следовательно, мощности $K_{\mathfrak{z}}^{(A)}$ и $K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)}$ одинаковы, откуда и следует необходимость условия.

Достаточность условия доказывается так:

Так как все кирпичи без общих точек, то все пространство E может быть так преобразовано само в себя, что $K_{\mathfrak{z}}^{(A)}$ перейдет в $K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)}$; но тогда и $A_i = \sum_{\mathfrak{z} \supset i} K_{\mathfrak{z}}^{(A)}$ перейдет в $B_{\varphi(i)} = \sum_{\mathfrak{z} \supset i} K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)}$ и благодаря взаимной однозначности φ вся система $\{A_i\}$ преобразуется в систему $\{B_k\}$.

Перейдем теперь к рассмотрению специального случая счетных систем, расположенных в пространстве мощности континуума. Очевидно, в данном случае за R можно принять совокупность всех натуральных чисел, а $\mathfrak{z}$ будет обозначать произвольную совокупность натуральных чисел.

Охарактеризуем нашу систему с помощью следующей функции, определенной на канторовом совершенном множестве C: точке канторова

множества $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ (где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — либо 0, либо 2 в разложении числа x в троичную дробь) ставим в соответствие мощность кирпича $K_{\mathfrak{z}}$, где $\mathfrak{z}$ есть множество тех чисел n, для которых α_n в разложении аргумента x равно 2. Назовем определенную таким образом функцию «функцией взаимоположения».

Очевидно, каждой последовательности множеств соответствует только одна функция взаимоположения. Наоборот, каждая функция, заданная на канторовом множестве и принимающая на нем значения $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots$, может быть рассматриваема как функция взаимоположения для некоторого семейства множеств, расположенных в пространстве, мощность которого равна $\sum\limits_{x \in C} f(x)$.

Как мы видели, для эквивалентности двух счетных последовательностей необходимо и достаточно, чтобы существовало такое взаимно однозначное преобразование индексов $\varphi(i)$, чтобы $\overline{\overline{K_{\mathfrak{z}}^{(A)}}} = \overline{\overline{K_{\varphi(\mathfrak{z})}^{(B)}}}$. Но в переводе на язык только что введенной функции взаимоположения это означает, что должно существовать такое взаимнооднозначное преобразование канторова множества самого в себя (причем преобразование специального вида, которое мы назовем n-преобразованием), в результате которого функция взаимоположения для $\{A_i\}$ переходит в функцию взаимоположения для $\{B_k\}$. Такие две функции, которые могут быть переведены друг в друга с помощью n-преобразования, будем называть эквивалентными функциями.

ТЕОРЕМА 2. *n — преобразование совершенного канторова множества является гомеоморфизмом.*

Доказательство. В результате n-преобразования канторова множества C каждая точка x преобразуется так: число, стоящее на n-м месте в разложении x в троичную дробь, перемещается на $\varphi(n)$-ое место, т. е. точка

$$x = \frac{n_1}{3} + \frac{n_2}{3^2} + \cdots$$

перейдет в

$$f(x) = \frac{n_1}{3^{\varphi(1)}} + \frac{n_2}{3^{\varphi(2)}} + \cdots$$

Тогда $|f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, если взять для x и $x + \Delta x$ первые k элементов разложения в троичную дробь одинаковыми, причем k выбираем так, чтобы $\varphi(k+1), \varphi(k+2), \ldots$ все были не меньше $m = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}$.

Действительно,

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant 2\left[\frac{1}{3^{\varphi(k+1)}} + \frac{1}{3^{\varphi(k+2)}} + \cdots\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2\left[\frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+2}} + \cdots\right] = \frac{1}{3^{m-1}} = \frac{1}{3^{-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}}} = \varepsilon.$$

Итак, $f(x)$ непрерывна, а следовательно (так как она определена на компактном совершенном множестве), и взаимно непрерывна.

Отсюда, в частности, следует, что необходимым условием эквивалентности двух счетных систем множеств $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ является существование такого автогомеоморфизма совершенного канторова множества, которое переводило бы функцию взаимоположения для $\{A_n\}$ в функцию взаимоположения для $\{B_n\}$.

Легко видеть, что существует только $\mathfrak{c}$ n-преобразований. Различных же функций, которые могли бы быть функциями взаимоположения в пространстве мощности континуума, имеется $2^{\mathfrak{c}}$. Следовательно, имеется $2^{\mathfrak{c}}$ попарно неэквивалентных функций взаимоположения, а значит и $2_{\mathfrak{c}}$ попарно неэквивалентных счетных систем множеств*. В частности, существуют последовательности, не эквивалентные никакой последовательности проективных или B-множеств (так как таких последовательностей только $\mathfrak{c}$).

Введем следующие обозначения: $N_{\mathfrak{m}}$ (где $\mathfrak{m}$ — кардинальное число) — совокупность тех точек канторова множества C, в которых функция взаимоположения принимает значение $\mathfrak{m}$. Задание всех $N_{\mathfrak{m}}$ вполне определяет функцию взаимоположения.

Естественно возникает вопрос о природе функции взаимоположения (т. е. о природе определяющих ее $N_{\mathfrak{m}}$) в связи с природой множеств, входящих в систему (множеств A_n).

Введем прежде всего следующие определения: пусть в пространстве X имеется семейство множеств К. Тогда функцию $y = f(x)$, определенную на X и принимающую значения C, будем называть слабо-измеримой К, если для любого n имеем $f^{-1}(C_n^2) \in$ К, где под C_n^2 подразумевается совокупность тех точек из C, в разложении которых в троичную дробь на n-м месте стоит число 2**. Далее, каждой точке $y \in C$ можно поставить в соответствие некоторое множество M_y тех точек пространства X, которые являются корнями уравнения $y = f(x)$. Совокупность тех y, для которых $\overline{\overline{M_y}} = \mathfrak{m}$, называется множеством точек $\mathfrak{m}$-кратности для функции $y = f(x)$.

Далее, допустимой совокупностью для семейства К назовем такую совокупность $\{C_{\mathfrak{m}}\}$ непересекающихся подмножеств C (в сумме дающих все C), занумерованную кардинальными числами $\mathfrak{m}$, начиная с нуля, которая может являться совокупностью множеств $\mathfrak{m}$-кратности для некоторой функции, слабо-измеримой К.

---

* Этот результат был раньше получен E. Szpilrajn [см. ([1])] из других соображений.

** Очевидно, что если К является борелевской системой (т. е. системой, инвариантной относительно счетного сложения и операции взятия дополнения), то понятие функции слабо-измеримой К совпадает с обычным понятием измеримой К функции (т. е. такой, у которой прообраз любого открытого множества принадлежит к К). Это следует из того, что, как легко видеть, любое открытое в C множество может быть получено из C_n^2 в результате счетного сложения, пересечения и взятия дополнения относительно C.

Вообще же понятие функции слабо-измеримой К является более широким, чем понятие функции измеримой К в обычном смысле слова.

Теперь докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Функция взаимоположения $f(y)$ для счетной системы множеств из* K *имеет в качестве совокупности $\{N_m\}$ допустимую совокупность для семейства* K. *Обратно, любая допустимая совокупность для семейства* K *может быть принята за совокупность $\{N_m\}$ для функции взаимоположения, имеющей в числе представляемых ею систем по крайней мере одну систему, составленную только из множеств семейства* K.

Доказательство. Пусть заданная счетная система множеств из K расположена в пространстве X. Задаем на этом пространстве функцию $y=F(x)$ следующим образом: ставим в соответствие точке x ту точку из множества C, которая соответствует множеству натуральных чисел, являющихся номерами тех из A_n, которые включают x.

Это — так называемая характеристическая функция счетной системы множеств, введенная E. Szpilrajn ([1], [2]).

Функция взаимоположения $f(y)$ и характеристическая функция E. Szpilrajn $y=F(x)$ связаны друг с другом соотношением

$$f(y)=\overline{\overline{F^{-1}(y)}},$$

откуда сразу следует, что совокупность тех $y \in C$, для которых $f(y)$ имеет одно и то же значение $\mathfrak{m}$ (т. е. совокупность $N_{\mathfrak{m}}$), совпадает со множеством точек $\mathfrak{m}$-кратности функции $y=F(x)$.

Далее, функция $y=F(x)$ слабо-измерима K, так как $F^{-1}(C_n^2)=A_n \in$ K. Итак, система $\{N_m\}$ совпадает с допустимой системой некоторой слабо-измеримой K функции, чем и доказывается первое утверждение теоремы.

Чтобы доказать обратное, заметим сначала, что если задать в пространстве X функцию, принимающую значения только из C, то система множеств — прообразов $A_n=F^{-1}(C_n^2)$ — будет иметь в качестве своих кирпичей прообразы точек $\mathfrak{z}$. Задаем теперь на X такую функцию $y=F(x)$, слабо-измеримую K, которая имеет в качестве своей системы множеств кратности заданную (расположенную на C) допустимую систему.

Тогда совокупность прообразов множеств C_n^2 будет счетной системой множеств, входящих в K. Ее функция взаимоположения будет иметь в качестве системы $N_{\mathfrak{m}}$ именно заданную допустимую совокупность, что явствует из того, что $K_{\mathfrak{z}}=F^1(\mathfrak{z})$ и, следовательно, $f(\mathfrak{z})=\overline{\overline{K_{\mathfrak{z}}}}=$ $=\overline{\overline{F^{-1}(\mathfrak{z})}}$ для любого $\mathfrak{z} \in C$.

Следствие 1. *Счетная система B-множеств имеет в качестве своей функции взаимоположения такую функцию, у которой $N_0, N_1, \ldots$ $\ldots, N_k, \ldots N_{\aleph_0}$ являются аналитическими дополнениями, а N_c — аналитическое множество*.*

Это следует из только что доказанной теоремы (первая часть) и из следующих соображений: совокупность точек нуль-кратности B-функции есть CA (как дополнение к C образа B-множества, на котором задана функция).

* Ср. Szpilrajn (2), стр. 145.

Совокупность точек 1-кратности является CA множеством в силу теоремы Лузина о проекции множества единственности ([3]).

Множество $\aleph_0$-кратности является CA-множеством, согласно теореме 7 статьи S. Braun ([4]).

Наконец, доказательство того, что совокупность точек n-кратности (где n — натуральное число > 1) есть также CA — множество, вытекает с помощью несложных рассуждений из теоремы Лузина. Для этого достаточно применить рассуждения S. Braun при доказательстве теоремы 6 ([4]), заменяя только множества D_1 на U, и систему непересекающихся окрестностей, фигурирующую в доказательстве, на систему окрестностей, не пересекающихся и в сумме дающих все C.

Следствие 2. *Всякая функция взаимоположения, у которой N_c — аналитическое множество, а $N_0, N_1, \ldots, N_k, \ldots N_{\aleph_0}$ попарно отделимые (B) CA-множества, имеет в числе своих представителей по крайней мере одну систему B-множеств.*

Это следует из того, что такая система является допустимой системой множеств кратности для B-функций. Действительно, если B-отделителями являются $B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots B_{\aleph_0}$, то всегда может быть построена B-функция $y = F(x)$, отображающая, например, эвклидову прямую X в C. Для этого отобразим отрезок $(1, 2)$ взаимнооднозначным B-образом на B_1, $\left[2, 2\frac{1}{2}\right)$ и $\left[2\frac{1}{2}, 3\right)$ на B_2 каждый, $\ldots$, $\left[n, n+\frac{1}{n}\right)$, $\left[n+\frac{1}{n}, n+\frac{2}{n}\right)$, $\ldots$, $\left[n+\frac{n-1}{n}, n+1\right)$ на B_n каждый, ... и, наконец, $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$, $\ldots$, $\left[\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$, $\ldots$ — на $B_{\aleph_0}$ каждый (если какое-либо из этих B_k было счетно или конечно, то не весь соответствующий интервал отображается на B_k, а только его счетная или конечная часть).

Если теперь оставшуюся неотображенной часть прямой отобразить с помощью континуум-кратной B-функции на N_c, то мы этим завершим построение B-функции, для которой данная система будет допустимой.

Замечание. Как указал П. С. Новиков, можно построить такую B-функцию, для которой все CA-множества, входящие в ее допустимую систему, попарно неотделимы (B). Естественно встает вопрос о природе допустимых систем для B-функций и, в частности, всякая ли система, состоящая из счетной совокупности непересекающихся CA и дополнительного к их сумме A-множества, может являться допустимой системой для B-функций.

Следствие 3. *Для всякого n существует такая допустимая система для проективных функций класса P_n*, которая не является допустимой системой для проективных функций низших классов.*

---

* Класс P_n — совокупность всех проективных множеств n-го класса.

Это следует из теоремы E. Szpilrajn о том, что всегда может быть найдена счетная совокупность проективных множеств n-го класса, не эквивалентная никакой счетной совокупности проективных множеств низших классов [см. ([1])].

Совершенно аналогично выводится и соответствующее следствие для классов B-множеств.

Следствие 4. *Всякая допустимая система для B-функций является допустимой и для некоторой функции 1-го класса.* Действительно, из теоремы E. Szpilrajn о том, что любая счетная система B-можеств эквивалентна некоторой системе B-множеств одновременно F_σ и G_δ следует (так как всякое открытое множество может быть получено как счетная сумма конечных пересечений множеств C_n^2 и $C_n^0 = C - C_n^2$), что допустимая система любой B-функции может быть получена как допустимая система такой B-функции, для которой прообразы всех открытых множеств суть F_σ (т. е. функции класса (F_σ, G_δ), [см. Hausdorff ([5])], а значит, B-функции 1-го класса Бэра [см. Hausdorff ([5])].

Наконец, из теоремы E. Szpilrajn о существовании счетной системы неизмеримых (L) множеств, не эквивалентной никакой системе множеств измеримых (L), вытекает

Следствие 5. *Существует такая допустимая система множеств, которая не является допустимой системой ни для какой функции, измеримой (L).*

§ 2. Одна общая теорема об эквивалентности семейств множеств

Как известно, типы эквивалентности множеств (кардинальные числа) образуют сами вполне упорядоченную систему. Упорядоченность этой системы следует, во-первых, из того факта, что любые два множества A и B связаны по крайней мере одним из двух эквивалентных включений ($A \tilde{\subset} B$ или $B \tilde{\subset} A$; знак $\tilde{\subset}$ означает, что первое множество эквивалентно части второго), и, во-вторых, из теоремы Cantor — F. Bernstein о том, что если $A \tilde{\subset} B$ и $B \tilde{\subset} A$, то $A \sim B$.

То, что первое предложение не имеет места для семейств множеств, видно сразу (достаточно взять, например, семейство A из двух пересекающихся и семейство B из двух дизъюнктных множеств).

Итак, остается выяснить, будет ли справедливым для семейств аналог теоремы Cantor — F. Bernstein.

Если бы он был справедлив, то типы эквивалентности систем, хотя и не образовывали бы упорядоченного множества, но, во всяком случае, были бы частично упорядочены; однако, как можно показать, и это не имеет места: возьмем в качестве A систему, составленную из следующих множеств: $a_1 = [0,1]$, $a_2 = [1,3]$, $a_3 = [2,4]$, $a_4 = [4,5]$, $a_5 = [5,7]$, $a_6 = [6,8]$, $a_7 = [8,9]$, $a_8 = [9,11]$, ... и т. д., в качестве системы B — систему тех же множеств, кроме первого.

Очевидно, что:

1) B $\tilde{\subset}$ A, так как B $\subset$ A,

2) А $\tilde{\subset}$ В, так как А $= \{a_1, a_2, \ldots\} \sim \{a_4, a_5, \ldots\} \subset$ В. Но А не $\sim$ В, что следует, например, из того, что $a_1 \in$ А имеет два непустых кирпича: [0,1] и [1], а в системе В нет множеств, которые имели бы два непустых кирпича, кроме a_2, но оба его кирпича континуальны.

Таким образом, вообще говоря, типы эквивалентности не образуют даже частично упорядоченной системы. Но естественно возникает вопрос: не будет ли выполняться аналог теоремы Cantor — F. Bernstein для частного вида систем, например, для B-колец* или B-тел** и т. д. Оказывается, теорема неверна и для B-колец и для B-тел (произвольных) и, как будет показано, верна только для довольно узкого вида тел.

Прежде всего покажем, что теорема неверна для B-колец. Действительно, если обозначить через K (А) наименьшее B-кольцо, построенное над ранее введенной системой А, а через K (В) — наименьшее B-кольцо над В, то, очевидно, K (А) $\tilde{\subset}$ K (В) и K (В) $\tilde{\subset}$ K (А). Но K (А) и K (В), как нетрудно проверить, не эквивалентны друг другу и, следовательно, и для колец аналог теоремы Cantor — F. Bernstein неверен.

Неверен он и для тел. Построение противоречащего примера с помощью систем А и В не удается, так как хотя T (А) $\tilde{\subset}$ T (В) и T (В) $\tilde{\subset}$ T (А), но T (А) $\sim$ T (В). Однако и для тел нетрудно построить противоречащий пример. Назовем *совершенным телом* такую систему множеств, которая инвариантна относительно сложения и пересечения множеств в любом (не обязательно счетном) числе, и операции взятия дополнения.

Очевидно, что все кирпичи совершенного тела входят в тело как его элементы, и, более того, все множества, входящие в тело, представляют собой всевозможные суммы, составленные из кирпичей во всевозможных их комбинациях.

Далее заметим, что если одно совершенное тело включает другое, то система кирпичей, определяющая первое тело, получается из кирпичей 2-го тела раздроблением некоторых из них. Возьмем теперь в качестве системы А совершенное тело, построенное на следующих кирпичах: счетное число кирпичей, мощность каждого из которых $= 1$ и счетное число кирпичей мощности 3. В качестве системы В возьмем совершенное тело над системой кирпичей, получившейся дроблением одного из кирпичей мощности 3 на 2 кирпича: мощности 1 и мощности 2. Очевидно, система В включает А и, следовательно, В $\tilde{\supset}$ А. Но и А $\tilde{\supset}$ В, так как если в системе В раздробить пополам кирпич мощности 2, то полученная система будет эквивалентна А и вместе с тем будет включать В. Однако А не $\sim$ В, что следует из необходимых и достаточных признаков эквивалентности системы (благодаря наличию в системе В кирпича мощности 2).

---

* B-кольцо—система, замкнутая относительно счетного суммирования и пересечения.

** B-телом называется всякое B-кольцо, инвариантное также по отношению к операции взятия дополнения.

Итак, теорема Cantor — F. Bernstein неверна даже для совершенных тел (в общем случае), а следовательно, подавно и для В-тел (так как совершенное тело является частным случаем В-тела).

Однако можно выделить класс таких совершенных тел, для которых аналог теоремы Cantor — F. Bernstein верен.

ТЕОРЕМА 4. *Если два совершенные тела* A *и* B *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *если в определяющую тело систему кирпичей входят кирпичи мощности* $\mathfrak{n}$ *и* $\mathfrak{m}$, *то в систему должны входить также кирпичи всех промежуточных мощностей;*

2) *если* $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$, *то* $\overline{\overline{\{K^{\mathfrak{n}}\}}} > \overline{\overline{\{K^{\mathfrak{m}}\}}}$ *(где* $\overline{\overline{\{K^{\mathfrak{n}}\}}}$ *— мощность совокупности кирпичей мощности* $\mathfrak{n}$ *каждый), если только* $\{K^{\mathfrak{n}}\}$ *не пусто;*

3) $\{K^{\aleph_\alpha + i}\}$ *непусты только для конечных* i, *где* $\aleph_\alpha$ *— наименьшая мощность кирпичей (таким образом, различных мощностей кирпичей либо конечное множество, либо счетное, расположенное в простую последовательность);*

— то для таких тел из $A \,\tilde{\subset}\, B$ *и* $B \,\tilde{\subset}\, A$ *следует* $A \sim B$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если два таких тела, одно из которых включено в другое, эквивалентны, то и любое из промежуточных тел указанного типа эквивалентно исходным.

Пусть система кирпичей $\{K_1\}$ определяет некоторое совершенное тело $T(K_1)$ и $\{K_2\}$ определяет совершенное тело $T(K_2)$, вложенное в $T(K_1)$ и эквивалентное ему. Тогда K_2 будет представлять собой результат раздробления некоторых из кирпичей, входящих в K_1. Если некоторые из них склеить, то вновь полученная система кирпичей K_0 определит некоторое промежуточное совершенное тело $T(K_0)$. Покажем, что оно эквивалентно $T(K_1)$ и $T(K_2)$.

Условимся в следующих обозначениях.

Через $\{K^\alpha\}$ будем обозначать совокупность кирпичей, мощность которых равна $\aleph_\alpha$ (кирпичей с конечной мощностью мы не будем рассматривать, равно как и случая, когда некоторые из систем кирпичей конечны, так как в обоих этих случаях несложными рассуждениями можно показать, что все сводится именно к наиболее важному случаю, когда все кирпичи бесконечно-мощны, причем каждое $\{K^\alpha\}$ имеет бесконечную мощность).

Через $\{K_2^\alpha\}_{\text{рк}\,\beta}$ (где $\beta \leqslant \alpha$) мы будем обозначать совокупность тех кирпичей мощности $\aleph_\alpha$ второй системы, которые при переходе к первой раскалываются на кирпичи мощности $\aleph_\beta$ каждый.

Через $\{K_2^\alpha\}_{\text{нрк}}$ обозначим не раскалывающиеся при этом переходе кирпичи.

Через $\{K_1^\alpha\}_{\text{ск}\,\beta}$ (где $\beta \geqslant \alpha$) обозначим совокупность тех кирпичей мощности $\aleph_\alpha$ первой системы, которые при переходе ко второй склеиваются в кирпичи мощности $\aleph$ каждый.

Через $\underset{\text{нск}}{\{K_1^\alpha\}}$ обозначим не склеивающиеся при этом переходе кирпичи первой системы.

Очевидно, что так как рассматриваемые нами совершенные тела эквивалентны, то

$$\overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}} = \overline{\overline{\{K_2^\alpha\}}}$$

при любом α.

Ясно, что такое условие будет и достаточным для эквивалентности *совершенных* тел.

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\overline{\overline{\{K_0^\alpha\}}} = \overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}}$$

для любого α.

Пусть наименьшей мощностью непустых кирпичей будет $\aleph_\alpha$, наибольшей $\aleph_{\alpha+\beta}$ (конечно, кирпичей с наибольшей мощностью может не быть, мы предполагаем наличие последней мощности лишь для простоты записи).

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\overline{\overline{\{K_2^\alpha\}}} \leqslant \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} + \overline{\overline{\{K_2^\alpha\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_0^\alpha\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}},$$

откуда мы заключаем, что

$$\mathrm{A}_0 \qquad \overline{\overline{\{K_2^\alpha\}}} \geqslant \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+2}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}},$$

$$\mathrm{B}_0 \qquad \overline{\overline{\{K_0^\alpha\}}} = \overline{\overline{\{K_n^\alpha\}}} \quad (n = 1, 2).$$

Далее имеем

$$\underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+2}\}}}} + \underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{нрк}}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+1}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}} + \underset{\text{ск }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}}}$$

$$\underset{\text{нрк}}{\{K_2^{\alpha+1}\}} + \underset{\text{рк }\alpha+1}{\{K_2^{\alpha+1}\}} = \{K_2^{\alpha+1}\} - \underset{\text{рк }\alpha}{\{K_2^{\alpha+1}\}}.$$

Но так как из A_0 имеем

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} > \overline{\overline{\{K_2^\alpha\}}} \geqslant \underset{\text{рк }\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}},$$

то

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\} - \underset{\text{рк }\alpha}{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} = \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}$$

и, значит,

$$\underset{\text{нрк}}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}} = \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}}.$$

С другой стороны,

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} + \underset{\text{ск }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}}} + \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}} \quad (\text{так как} \quad \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}} > \overline{\overline{\{K_1^\alpha\}}}).$$

Поэтому наше неравенство перепишется так:

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} \leqslant \underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк }\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+2}\}}}} + \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+1}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}},$$

откуда

$$A_1 \qquad \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+2}\}}}} + \underset{\text{рк}\,\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+3}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}},$$

$$B_1 \qquad \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+1}\}}} = \overline{\overline{\{K_n^{\alpha+1}\}}} \qquad (n = 1;\ 2).$$

Пусть теперь $1 \leqslant i \leqslant \beta$. Трансфинитной индукцией докажем, что $\overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}} = \overline{\overline{\{K_n^{\alpha+i}\}}}$, полагая, что для $\gamma < i$ доказаны соотношения:

$$A_\gamma \qquad \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\gamma}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+\gamma}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\gamma+1}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+\gamma}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}},$$

$$B_\gamma \qquad \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+\gamma}\}}} = \overline{\overline{\{K_n^{\alpha+\gamma}\}}} \qquad (n = 1;\ 2).$$

Итак, произведем оценку $\overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}}$:

$$\underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\{K_2^{\alpha+\beta}\}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\{K_2^{\alpha+i+1}\}} + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\{K_2^{\alpha+i}\}} + \underset{\text{нрк}}{\{K_2^{\alpha+i}\}} \leqslant \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}} + \ldots + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha}\}}}}.$$

Заметим теперь, что

$$\{K_2^{\alpha+i}\} = \underset{\text{нрк}}{\{K_2^{\alpha+i}\}} + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\{K_2^{\alpha+i}\}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+\gamma}{\{K_2^{\alpha+i}\}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha}{\{K_2^{\alpha+i}\}}.$$

Из A_0 следует, что

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} > \overline{\overline{\{K_2^{\alpha}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}}.$$

Из A_1 следует, что

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} > \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+1}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+1}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}}$$

и вообще из A_γ следует, что

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} > \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\gamma}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+\gamma}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}}$$

(для любого $\gamma < i$). Таким образом, во второй половине равенства мощность каждого слагаемого (кроме первых двух) меньше, чем $\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}$. Мощность же их суммы будет меньше, чем

$$\overline{\overline{i}} \cdot \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} = \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}$$

(на основании 3-го условия, наложенного на рассматриваемые тела).

Итак, в результате мы получаем

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} = \underset{\text{нрк}}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}} + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}}}. \tag{1}$$

Так как, с другой стороны,

$$\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}} + \ldots + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha}\}}}} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}} + \ldots + \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}} + \overline{\overline{\{K_1^{\alpha}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}}\,\overline{\overline{i}} = \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}},$$

то

$$\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}} + \ldots + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+\gamma}\}}}} + \ldots + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha+1}\}}}} + \underset{\text{ск}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_1^{\alpha}\}}}} = \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}}. \qquad (2)$$

Подставляя (1) и (2) в наше неравенство (оценку $\overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}}$), получим:

$$\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} \leqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i+1}\}}}} + \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}} \leqslant \overline{\overline{\{K_1^{\alpha+i}\}}},$$

откуда

$$\text{A}_i \qquad \overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i}\}}} \geqslant \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+i+1}\}}}} + \ldots + \underset{\text{рк}\,\alpha+i}{\overline{\overline{\{K_2^{\alpha+\beta}\}}}},$$

$$\text{B}_i \qquad \overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}} = \overline{\overline{\{K_n^{\alpha+n}\}}} \qquad (n = 1, 2).$$

Итак, мы имеем для любого i (от $i = 0$ до $i = \beta$) $\overline{\overline{\{K_0^{\alpha+i}\}}} = \overline{\overline{\{K_n^{\alpha+i}\}}}$, из чего сразу следует, благодаря достаточности этого условия для эквивалентности совершенных тел, что

$$T(K_0) \sim T(K_1),$$

чем и доказан аналог теоремы Cantor — F. Bernstein для совершенных тел указанного вида.

Наконец, можно показать, что все три условия, которые наложены на тела рассматриваемого вида, существенны для выполнения аналога теоремы Cantor — F. Bernstein. Для этого достаточно построить примеры совершенных тел, в которых выполняется не более двух из данных трех условий и для которых теорема Cantor — F. Bernstein не имеет места. (В частности, совершенное тело, для которого выполнены все условия, кроме первого, и такое, что для него теорема Cantor — F. Bernstein неверна, построено мной выше).

§ 3. Вопросы эквивалентности семейств B-множеств *

В настоящем параграфе E будет повсюду обозначать некоторое полное метрическое пространство со счетной базой.

Задачей § 3 является доказательство неэквивалентности некоторых семейств B-множеств и, в частности, неэквивалетности двух различных классов B-множеств (с точки зрения классификации B-множеств, данной Vallée — Poussain и Hausdorff).

ЛЕММА. *Пусть семейство $\mathfrak{N}$ подмножеств E таково, что каждое открытое множество пространства E входит в борелевское замыкание семейства $\mathfrak{N}$ **. Если $\mathfrak{N}$ эквивалентно семейству $\mathfrak{M}$, состоящему исключительно из B-множеств, то такая эквивалентность может быть осуществлена только при помощи отображения E самого на себя, заданного B-функцией.*

* Основные результаты этой главы опубликованы ранее в моей заметке в ДАН [6].

** Борелевским замыканием семейства множеств называется минимальное объемлющее его семейство, инвариантное по отношению к сложению множеств в конечном или счетном числе, и к операции взятия дополнения (т. е. перехода от M к $E - M$).

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ есть взаимно-однозначное отображение E на самого себя, преобразующее $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$, и $x = f^{-1}(y)$ — обратное отображение. Пусть далее, $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ полная система окрестностей пространства, и $T_n = f(G_n)$. Так как G_n входят в борелевское замыкание $\mathfrak{N}$, то T_n входят в борелевское замыкание $\mathfrak{M}$, т. е. являются B-множествами. Обозначим через L верхнюю грань классов множеств T_n. Каково бы ни было открытое множество G пространства E, его можно представить в виде $G = \sum_k G_{i_k}$. Следовательно, множество $T = f(G) = f(\sum_k G_{i_k}) = \sum_k f(G_{i_k}) = \sum_k T_{i_k}$ будет B-множеством класса не выше $\alpha + 1$. Иначе говоря, при отображении $x = f^{-1}(y)$ прообразы открытых множеств будут B-множествами класса не выше $\alpha + 1$. Это и значит, что функция $f(x)$ есть B-функция.

В силу взаимной однозначности отображения $y = f(x)$ функция $f(x)$ также является B-функцией.

Определение. Семейство $\mathfrak{N}$ называется N-семейством, если оно обладает следующими свойствами:

1. Любое открытое множество пространства E входит в борелевское замыкание семейства.

2. Любое компактное совершенное множество пространства E содержит в себе хотя бы одно множество из $\mathfrak{N}$.

ТЕОРЕМА 5. *N-семейство $\mathfrak{N}$, все множества которого обладают каким-либо топологически инвариантным свойством K, не может быть эквивалентно никакому семейству $\mathfrak{M}$, состоящему исключительно из B-множеств, ни одно из которых не обладает свойством K.*

Доказательство. Если бы, вопреки теореме, взаимно-однозначное отображение $y = f(x)$ пространства E на самого себя переводило бы $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$, то в силу леммы функция $f(x)$ должна была бы быть B-функцией. Но по теореме Бэра можно найти такое плотное в E множество G_δ, на котором заданная B-функция непрерывна. Но тогда та же функция будет непрерывна и на компактном совершенном ядре P этого G_δ. Непрерывная и взаимно-однозначная функция f на компактном множестве является взаимно-непрерывной, т. е. $y = f(x)$ является гомеоморфизмом. По условию, на P найдется множество M из $\mathfrak{N}$, обладающее свойством K. Множество $f(M)$ тоже обладало бы свойством K и входило бы в $\mathfrak{M}$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Говорят, что B-множество принадлежит строго классу G^ξ (F^ξ), если оно, являясь G^ξ (F^ξ), не является F^ξ (G^ξ) множеством.

Говорят, что множество G^ξ (F^ξ) принадлежит жестко классу G^ξ (F^ξ), если его любая непустая порция * является множеством строго G^ξ (F^ξ),

* Порцией множества называется пересечение заданного множества с открытым множеством.

При $\xi \geqslant 2$ свойство быть строго $G^{\xi}(F^{\xi})$, равно как и жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$, является топологически инвариантным.

Для множеств строгого класса $G^{\xi}(F^{\xi})$ это известно давно [см., например, Hausdorff (5)]. Доказать же топологическую инвариантность свойства быть жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$ можно следующим образом *:

Пусть множество M жестко класса $G^{\xi}(F^{\xi})$ в результате гомеоморфного преобразования $f(M)$ перейдет в множество M, не являющееся множеством жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$. Это значит, что может быть получено такое открытое множество G_0, что $G_0 \cdot M$ является множеством одновременно класса G^{ξ} и F^{ξ}. Но тогда найдется замкнутое множество $F_0 \subset G_0$ такое, что $F_0 \cdot M$ также одновременно G^{ξ} и F^{ξ}. Рассмотрим теперь множество $M^1 = M - (G_0 - F_0)\, M$. Его прообразом будет множество $M^1 = M - f^{-1}(G_0 - F_0)\, M$, причем $f^{-1}(G_0 - F_0)$ есть множество типа G_δ и, следовательно, M также жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$ (для $\xi \geqslant 2$) (так как $(G_0 - F_0)\, M$ класса более низкого, чем ξ). Но $M^1 = CG_0 \cdot M + F_0 \cdot M$, т. е. M^1 есть сумма двух множеств, отделимых друг от друга замкнутыми множествами. Поэтому $\overline{f^{-1}(CG_0 \cdot M)}$ не имеет общих точек с $f^{-1}(F_0 \cdot M)$, а значит, $f^{-1}(F_0 \cdot M)$ представляет собой открытую порцию M^1 (а именно $f^{-1}(F_0 \cdot M) = M^1 \cdot C\,\overline{f^{-1}(CG_0 \cdot M)}$). Но тогда M^1 не может быть множеством жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$, так как $f^{-1}(F_0 \cdot M)$ является одновременно G^{ξ} и F^{ξ}, а следовательно, и M не могло бы быть жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$, что противоречит предположению.

Топологическая инвариантность свойства множеств быть жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$ позволяет установить

Следствие 1. *При $\xi \geqslant 2$ семейство всех множеств жестко класса $G^{\xi}(F^{\xi})$ не эквивалентно никакому непересекающемуся с ним семейству B-множеств.*

Для доказательства этого достаточно показать, что совокупность всех множеств жестко класса $G^{\xi}(F^{\xi})$ образует N-семейство с топологическим свойством «быть жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$» ($\xi \geqslant 2$). Для этого достаточно показать, что выполняются оба требования, налагаемые на N-семейство.

Выполнение условия 2 очевидно.

Покажем, что для этого семейства также выполняется условие 1.

Рассмотрим отдельно 2 случая:

(a) множества $G^{\xi}(F^{\xi})$ мультипликативного класса (т. е. могут быть представлены как счетное пересечение множеств низших классов);

(b) множества $G^{\xi}(F^{\xi})$ аддитивного класса.

---

* Идея предлагаемого доказательства топологической инвариантности класса жестко $G^{\xi}(F^{\xi})$ принадлежит А. А. Ляпунову.

В случае (a) всякое открытое множество может быть представлено как сумма счетного класса множеств жестко $G^\xi (F^\xi)$ мультипликативного класса.

Действительно, открытое множество G_0 может быть представлено как сумма плотных в нем множеств K и $G_0 - K$, где K жестко $G^\xi (F^\xi)$ мультипликативного класса, а $G_0 - K$ жестко $F^\xi (G^\xi)$ аддитивного класса. Но $G_0 - K$ может быть представлено как счетная сумма множеств низших классов: $G_0 - K = A_1 + A_2 + \ldots$. Прибавляя каждое из слагаемых к K, получим совокупность множеств $G^\xi (F^\xi)$ мультипликативного класса, дающих в сумме G_0:

$$G_0 = (K + A_1) + (K + A_2) + \ldots$$

В случае (b) всякое открытое множество представимо в виде суммы двух жестко $G^\xi (F^\xi)$ аддитивного класса.

Покажем сначала, что в G_0 могут быть помещены два непересекающиеся всюду плотные в G_0 множества жестко $F^\xi (G^\xi)$ мультипликативного класса. Строим их следующим образом: помещаем в G_0 всюду плотное в нем F_δ, составленное как счетная сумма нигде не плотных совершенных множеств H_k. На каждом из H_k помещаем по одному жестко $F^\xi (G^\xi)$ мультипликативного класса, плотному в H_k. Тогда сумма M_1 этих множеств жестко $F^\xi (G^\xi)$ составит также множество жестко $F^\xi (G^\xi)$ мультипликативного класса [как сумма $\acute{e}\ l\,\xi$, отделимых замкнутыми множествами, см. Lusin ([3])].

M_1 будет плотно в F_δ, а следовательно, и в G_0. Далее, совершенно тем же путем строим в $G_0 - \sum\limits_k H_k$ множество типа F_σ, плотное в $G_0 - \sum\limits_k H_k$ и, так же как и выше, погружаем в него плотное в нем M_2, являющееся жестко $F^\xi (G^\xi)$ мультипликативного класса. Но M_2, плотное в F_σ, будет плотно и в $G_0 - \sum\limits_k H_k$, а следовательно, и в G_0. Но тогда $G_0 - M_1$ и $G_0 - M_2$ являются оба жестко $G^\xi (F^\xi)$ аддитивного класса, и в сумме дают G_0 (так как $M_1 \cdot M_2 = 0$).

Итак, в обоих случаях совокупность всех множеств жестко $G^\xi (F^\xi)$ образует N-семейство, чем и доказано следствие 1.

Следствие 2. *Семейство всех замкнутых компактных множеств не эквивалентно никакой совокупности B-множеств, ни одно из которых не является замкнутым компактным.*

Следствие 3. *Совокупность всех B-множеств*

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{не выше 1 класса}\\ \textit{строго } G^\xi\ (\xi \geqslant 2)\\ \textit{строго } F^\xi\ (\xi \geqslant 2)\end{array}\right.$$

не эквивалентно никакой совокупности В-множеств, ни одно из которых не является множеством

$$\begin{cases} \text{замкнутым компактным} \\ \text{жестко } G^{\xi}\ (\xi \geqslant 2) \\ \text{жестко } G^{\xi}\ (\xi \geqslant 2). \end{cases}$$

В частности , отсюда следует

Следствие 4. *При $\xi \geqslant 2$ семейство всех множеств G^{ξ} (F^{ξ}) не эквивалентно никакому семейству, состоящему исключительно из множеств F^{ξ} (G^{ξ}).*

Введем теперь понятие «уплотнения семейства».

Семейство $\mathfrak{N}$ может быть уплотнено в свою часть $\mathfrak{M}$, если существует такое взаимно-однозначное преобразование пространства самого себя, которое переводит все семейство $\mathfrak{N}$ в его часть $\mathfrak{M}$.

Назовем далее максимальным N-семейством со свойством K систему — сумму всех N-семейств со свойством K. Для них мы будем иметь следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Если максимальное N-семейство $\mathfrak{N}$ состоит только из B-множеств, то оно не может быть уплотнено в такое свое подсемейство $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ образует N-семейство.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ переводится в $\mathfrak{M}$ с помощью функции $y = f(x)$. На основании леммы она должна быть B-функцией. Но тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ (тоже B-функция) переведет $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ в некоторое семейство B-множеств, ни одно из которых не обладает свойством K (ввиду максимальности N-семейства $\mathfrak{N}$, что невозможно на основании доказанной теоремы (так как $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ является N-семейством со свойством K).

Следствия из этой теоремы в применении к отдельным максимальным семействам B-множеств очевиды.

Отметим еще, что непосредственно из леммы вытекает

Следствие 5. *Семейство всех B-множеств не эквивалентно никакой своей правильной части.*

Из леммы и следствия 5 можно вывести

Следствие 6. *Семейство всех A-множеств (суслинских множеств) не эквивалентно никакой своей правильной части.*

Если $\mathfrak{A}$ — совокупность всех A-множеств можно было бы отобразить на свою правильную часть $\mathfrak{A}_1$, то совокупность $\mathfrak{B}$ всех B-множеств отобразилась бы на некоторую совокупность $\mathfrak{B}_1$ также B-множеств (ввиду того, что $\mathfrak{B}$ инвариантно относительно операции взятия дополнения). Из следствия 5 вытекает, что $\mathfrak{B}_1$ совпадает с $\mathfrak{B}$. Но такое преобразование могло быть (на основании леммы) осуществлено только B-функцией. Так как свойство множества быть A-множеством инвариантно относительно B-преобразования, то $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, вопреки предположению.

Переходом к дополнениям выводится

Следствие 7. *Семейство всех СА-множеств (дополнений к А-множествам) не эквивалентно никакой своей правильной части.*

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 IV 1940

ЛИТЕРАТУРА

1. Szpilrajn E., Sur l'équivalence des suites. Fund. Math., XXVI, (1936), 302—326.
2. Szpilrajn E., On the isomorphism and the equivalence of classes, Fund. Math,, XXXII, (1939), 133—148.
3. Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.
4. Braun S., Quelques théorèmes sur les cribles boreliens, Fund. Math., XX, (1933), 166—172.
5. Hausdorff, Mengenlehre, 1927.
6. Очан Ю. С., об эквивалентности семейств B-множеств, Доклады Ак. Наук СССР, XXIII (1939), 753—755.

G. OTCHAN. QUELQUES QUESTIONS DE L'ÉQUIVALENCE DES FAMILLES D'ENSEMBLES

RÉSUMÉ

Deux familles d'ensembles situés respectivement dans les espaces E_1 et E_2 sont dites équivalentes si E_1 peut être transformé en E_2 d'une manière biunivoque de sorte que tout ensemble de la première famille devienne un ensemble de la seconde, et qu'inversement, pour tout ensemble de la seconde famille on puisse trouver son image inverse parmi les ensembles de la première famille [voir Szpilrajn ([1])].

De la transformation biunivoque dont il est question aucune propriété de continuité, de mesurabilité etc. n'est exigée. Donc la notion de l'équivalence de deux familles d'ensembles appartient à la théorie pure des ensembles et ne depend guère de la nature topologique de l'espace.

E. Szpilrajn établit une série de théorèmes sur l'équivalence et la non-équivalence de systèmes dénombrables d'ensembles.

Il montra par exemple que pour chaque n il existe une famille dénombrable d'ensembles projectifs de classe n qui n'est équivalente à aucune famille d'ensembles de classes inférieures. Il en suit en particulier que la famille même de tous les ensembles de classe n n'est équivalente à aucune famille consistant seulement en ensembles de classes inférieures. Dans le présent article une proposition analogue pour les classes des ensembles B est établie parmi des autres résultats: la famille de tous les ensembles B de la classe F^ξ (G^ξ) n'est équivalente à aucune famille consistant exclusivement en ensembles B de classes inférieures. Ce résultat ne peut pas être, comme dans le cas des ensembles projectifs obtenu à l'aide de considération des familles dénombrables d'ensembles, puisque E. Szpilrajn démontra que toute famille dénombrable d'ensembles B est équivalente à une famille d'ensembles consistant exclusivement en ensembles qui sont en même temps F_σ et G_δ. A l'étude de cette question

de non-équivalence des classes d'ensembles B, ainsi qu'à une série de questions contigues, est consacré le chapitre III du présent ouvrage.

Dans le premier chapitre sont étudiées les généralités de la théorie d'équivalence. On introduit la notion de la «brique du système» et de la «fonction de la disposition mutuelle», une fonction qui caractérise un système dénombrable à de transformations équivalentes près et invariante quant à ces transformations équivalentes. Ensuite, dans le même chapitre est étudiée la nature de la fonction de la disposition mutuelle en connexion avec la nature des ensembles entrant dans le système, et on y donne quelques applications de la théorie de la fonction de la disposition mutuelle à la théorie des projections de certaines classes d'ensembles.

Dans le chapitre II une question de la théorie pure des équivalences est envisagée. Certaines conditions suffisantes sont trouvées auquelles il faut assujettir les familles pour qu'une proposition sur l'équivalence des ensembles analogue au théorème de Cantor — F. Bernstein ait lieu (à savoir, la proposition suivante: si la famille A est équivalente à une partie de la famille B et B est équivalente à une partie de A, alors A est équivalente à B) et dont le caractère essentiel de chacune est démontré par la construction des exemples.

Enfin, dans le chapitre III, comme on l'a déjà indiqué plus haut, la question de la non-équivalence des classes d'ensembles B est traitée.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 183—226 Série mathématique

Ю. Ф. СИРВИНТ

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В АБСТРАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ II. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ *

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Вторая часть работы посвящена пространству линейных функционалов, определенных на линейном топологическом пространстве. Здесь доказывается при различных предположениях «принцип сгущения особенностей» для функционалов. Здесь также получены теоремы, устанавливающие взаимоотношения между исходной, второй сопряженной и слабой топологиями в локально выпуклом пространстве.

Глава 3

Пространство линейных функционалов

Пусть E нормированное пространство. Тогда пространство E^* линейных функционалов, определенных в E, также может быть нормировано. Так определяется, наряду со сходимостью точек $x \in E$, сходимость функционалов, т. е. точек $f \in E^*$. Далее, в пространстве E может быть определена слабая сходимость элементов, а в пространстве E^* слабая сходимость функционалов.

В книге С. Банаха ([1]) мы можем найти основные результаты, сюда относящиеся, ежегодно пополняемые новыми работами по этому вопросу.

Мы ставим себе в этой и в следующей главе целью — наметить вехи подобной же теории для любого локально-выпуклого пространства E (аксиомы $1-5$, гл. 1, § 2). Эта теория будет приложима даже к более широкому классу пространств, однако, выходя за пределы класса пространств локально-выпуклых, мы сразу теряем некоторые основные результаты, верные для этого класса. В дальнейшем всегда, когда это не оговорено особо, будем предполагать, что E линейное топологическое пространство.

§ 1. Сопряженная топология

Определение линейного функционала было дано в главе 2, § 1. Отметим, что, согласно следствию Вехаузена [([4]), стр. 163], для того, чтобы

* Главнейшие результаты этой части были опубликованы без доказательств в ДАН, т. XXVI, № 2 (1940).

аддитивный функционал $f(x)$ в пространстве E был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы существовала выпуклая окрестность нуля U, которую можно, не уменьшая общности, предполагать симметричной относительно нуля: $U=-U$), обладающая свойством

$$f(x) \leqslant |x/U| \text{ для любого } x \in E. \tag{1}$$

Выпуклую окрестность нуля U, симметричную относительно нуля, для которой выполнено (1), мы будем называть нормирующей сферой функционала $f(x)$. Очевидно, данный линейный функционал имеет бесконечно много различных нормирующих сфер.

Так как из аддитивности функционала следует $f(-x)=-f(x)$, то неравенство (1) влечет $-|-x/U| \leqslant f(x)$, а вследствие симметричности U, $|x/U|=|-x/U|$ и из (1) мы получаем

$$|f(x)| \leqslant |x/U| \text{ для любого } x \in E. \tag{1-bis}$$

Из вехаузеновского следствия вытекает

Замечание 1. Пусть $f(x)$ аддитивный и однородный функционал в E,

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(ax)=af(x).$$

Для того чтобы он был непрерывен, достаточно, чтобы он был непрерывен в точке нуль. Под последним мы понимаем, что множество

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1)$$

содержит нуль внутри себя, т. е. существует такая окрестность нуля U, что

$$U \subset \underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1). \tag{2}$$

Доказательство. Окрестность нуля U из формулы (2) можно очевидно предполагать выпуклой и симметричной относительно нуля.

Вследствие однородности функционала $f(x)$ мы имеем

$$|x_0/\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1)|=|f(x_0)|. \tag{3}$$

В самом деле, если $a>|f(x_0)|$, то $\frac{x_0}{a} \in \underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1)$; если же $a<|f(x_0)|$, то $\frac{x_0}{a}$ non $\in \underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1)$.

Но по самому определению относительной нормы из (2) следует

$$|x_0/U| \geqslant |x_0/\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)|<1)|,$$

что в соединении с равенством (3) дает нам (1). Применяя следствие Вехаузена, видим, что $f(x)$ непрерывен, что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество E^* линейных функционалов в линейном топологическом пространстве E. Это множество станет линейным пространством, если мы положим для $f_1, f_2 \subset E^*$ и вещественного a

$$(f_1+f_2)(x)=f_2(x)+f_2(x), \quad (af_1)(x)=af_2(x).$$

Нам придется в дальнейшем воспользоваться одним фактом, являющимся частным случаем теоремы 11 работы ([4]) Вехаузена, но который, впрочем, столь непосредственно вытекает из известного следствия Банаха [([1]), стр. 29], связанного с продолжением дистрибутивных функционалов в линейном пространстве, что мы будем называть его следствием Банаха.

Результат Банаха, который мы имеем в виду, гласит: если в линейном пространстве E определен функционал $p(x)$ со свойствами

$$1^\circ.\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$
$$2^\circ.\ p(ax) = ap(x) \text{ при } a > 0$$

и если x_0 есть любая точка E, то в E существует дистрибутивный функционал $f(x)$ такой, что $f(x) \leqslant p(x)$ для любого $x \in E$ и

$$f(x_0) = p(x_0).$$

Предположим теперь, что E линейное топологическое пространство и возьмем произвольную выпуклую окрестность нуля U и точку $x_0 \in E$. Полагая $p(x) = |x/E|$, мы видим, что свойства 1°, 2° налицо, и получаем

Следствие Банаха. Какова бы ни была выпуклая симметричная окрестность нуля U в E и точка $x_0 \in E$, существует $f_0 \in E^*$, для которого U есть нормирующая сфера и $f_0(x_0) = |x_0/U|$.

Именно из этого следствия легко выводится обстоятельство, на которое я указывал в гл. 2: для того, чтобы линейное топологическое пространство E было нигде не выпукло, необходимо и достаточно, чтобы в нем отсутствовали отличные от нуля линейные функционалы. В самом деле, если $f(x)$ есть линейный функционал, отличный от тождественного нуля, то множество $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) < 1)$ есть выпуклое открытое множество, отличное от всего пространства E. Если же, наоборот, U' есть выпуклое открытое множество, отличное от E, то, во-первых, путем переноса можно добиться того, что мы получим выпуклую окрестность нуля U, отличную от E. Затем мы можем выбрать $x_0 \operatorname{non} \in U$ и заключить на основании следствия о существовании такого линейного функционала $f(x)$, для которого

$$f(x_0) = |x_0/U| \geqslant 1.$$

Определим теперь в линейном пространстве E^* топологию, которую мы будем называть сопряженной топологией по отношению к топологии в E.

Сопряженная топология в E^* определяется при помощи приведенного семейства открытых множеств *

$$V = \underset{f}{\mathcal{E}}(\sup_{x \in G} |f(x)| < 1), \tag{4}$$

где G пробегает класс всех ограниченных множеств пространства E.

* Определение «приведенного семейства открытых множеств» см. в гл. 1.

Докажем, что сопряженная топология выпукла.

Согласно теореме 5 главы 1, достаточно показать, что любое множество V вида (4) окружает в E^* нуль открытым образом и что для каждого $f \in E^*$, $f \neq 0$, найдется V вида (4) с $|f/V| > 0$.

Пусть V имеет вид (4). Возьмем любое $f_0 \in E^*$. Пусть U его нормирующая сфера. Мы имеем, согласно (1-bis)

$$\sup_{x \in G} |f_0(x)| \leqslant |G/U| < \infty. \tag{5}$$

Каково бы ни было число $a > \sup_{x \in F} |f_0(x)|$, мы будем иметь $\frac{1}{a} f_0 \in V$.

Итак, V окружает нуль. Далее, каково бы ни было $a \leqslant \sup_{x \in G} |f_0(x)|$, мы будем иметь $\frac{1}{a} f_0 \operatorname{non} \in V$.

Итак,

$$|f_0/V| = \sup_{x \in G} |f_0(x)|. \tag{6}$$

Мы видим, что $|f_0/V| = 1$ влечет $f_0 \operatorname{non} \in V$, т. е. V окружает нуль открытым образом.

Возьмем теперь любое $f_0 \in E^*$, $f_0 \neq 0$. Должно существовать $x_0 \in E$ такое, что $|f_0(x_0)| > 0$. Рассмотрим множество

$$V_0 = \mathop{\mathscr{E}}_{f} (|f(x_0)| < 1). \tag{7}$$

Это есть множество вида (4), в котором взято $G = (x_0)$. Мы имеем согласно (6) $|f_0/V_0| = |f_0(x_0)| > 0$, что и требовалось доказать. Итак, сопряженная топология выпукла.

Мы превратили линейное пространство E^* в локально-выпуклое пространство. Посмотрим, что означает сходимость последовательности точек f_n этого пространства к точке $f \in E^*$.

Согласно следствию 1 теоремы 6 главы 1 и формуле (6) этого параграфа, $f_n \to 0$ тогда и только тогда, когда для любого ограниченного $G \subset E$ выполняется

$$\lim_{n \to \infty} [\sup_{x \in G} |f_n(x)|] = 0.$$

Таким образом, $f_n \to f$ тогда и только тогда, когда $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на всяком ограниченном множестве точек E.

Посмотрим теперь, что означает ограниченность множества $\Gamma \subset E^*$. Применяя следствие 2 теоремы 6 главы 1 и формулу (6), мы видим:

Множество $\Gamma \subset E^*$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$|\Gamma/V| = \sup_{f \in \Gamma,\, x \in G} |f(x)| < \infty.$$

Для любого ограниченного $G \subset E$, т. е. численный образ всякого ограниченного множества точек E, даваемый множеством функционалов Γ, ограничен.

Как мы видим, сходимость функционалов и их ограниченность определены вполне естественно. Если пространство E нормированное, то

сопряженная топология в E^* совпадает с банаховой топологией функционалов по форме. Заметим, что сопряженная топология есть еще топология по норме, если E только локально ограничено. В самом деле, в этом случае выпуклая окрестность нуля в E вида

$$V = \underset{f}{\mathcal{E}} (\sup_{x \in U} |f(x)| < 1),$$

где в качестве U взята ограниченная окрестность нуля в E есть ограниченное множество. Следовательно, согласно уже не раз упоминавшейся теореме Колмогорова, E^* есть нормированное пространство.

В дальнейшем мы будем иметь дело с различными топологиями в пространствах E и E^*. Но сопряженную топологию мы будем считать основной топологией в пространстве E^*. Множество V, открытое в смысле сопряженной топологии, мы будем называть просто открытым множеством функционалов и т. д.

Приняв теперь локально-выпуклое пространство E^* за исходное пространство, рассмотрим пространство E^{**}, сопряженное к E^*, т. е. второе сопряженное к E. Пространство E, так же как в теории нормированных пространств, можно считать подпространством E^{**}, если считать, что каждый элемент $x \in E$ определяет функционал $F \in E^{**}$ при помощи равенства

$$F(f) = f(x) \text{ для } f \in E^*.$$

Действительно, такой функционал в пространстве E^* будет линеен. Дистрибутивность его очевидна. Что же касается непрерывности, то, согласно замечанию 1, достаточно доказать непрерывность его в точке нуль. Мы имеем

$$\underset{f}{\mathcal{E}} (|F(f)| < 1) = \underset{f}{\mathcal{E}} (|f(x)| < 1) = V_0,$$

где V_0 — множество вида (7), т. е. окрестность нуля в E^*. Итак, $F(f)$ действительно линейный функционал в E^*. Мы можем считать $E \subset E^{**}$. Отсюда следует, что вторая сопряженная топология есть некоторая топология в пространстве E. Однако в отличие от того факта, который имеет место для нормированного пространства E, вторая сопряженная топология не будет в общем случае совпадать с основной.

Чтобы различить эти две топологии, определенные в одном и том же линейном пространстве, мы будем обозначать вторую сопряженную топологию через (cc) топологию. Множество, открытое в смысле этой топологии, будем называть (cc) открытое и т. д.

(cc) топология может быть непосредственно определена в пространстве E при помощи приведенного семейства

$$U = \underset{x}{\mathcal{E}} (\sup_{f \in \Gamma} |f(x)| < 1), \tag{8}$$

где Γ пробегает класс всех ограниченных множеств в E^*.

Если предполагать, что E только линейное топологическое пространство, то (cc) топология может выродиться, она может перестать удовлетворять аксиоме 2, гл. 1, § 2. В самом деле, если E нигде не выпукло,

то E^* состоит лишь из одного нулевого элемента. Тогда приведенное семейство (8) состоит лишь из одного множества $U = E$ и (cc) топология вырождается. Однако если E линейное топологическое пространство, в котором существует конечная выпуклая окрестность нуля, то (cc) топология выпукла.

§ 2. Равно-непрерывность и (cc) топология

Мы установили выше, что аддитивный и однородный функционал $f(x)$ непрерывен, если множество $\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)| < 1)$ содержит нуль внутри себя. Естественно поэтому назвать множество $\Gamma \subset E^*$ линейных функционалов равно-непрерывным, если пересечение множеств $\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)| < 1)$ по всем $f \in \Gamma$ все еще содержит нуль внутри себя. Тогда существует выпуклая окрестность нуля U, симметричная относительно нуля и такая, что $U \subset \underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)| < 1)$, каково бы ни было $f \in \Gamma$, а отсюда, так же как из формулы 2 предыдущего параграфа следует, что U есть нормирующая сфера каждого из функционалов f.

Итак, равно-непрерывное множество функционалов — это такое множество $\Gamma \subset E^*$, для которого существует нормирующая сфера, общая всем его функционалам.

Если $\Gamma \subset E^*$ равно-непрерывное множество функционалов и $x_n \to 0$, то $f(x_n) \to 0$ равномерно на Γ. В самом деле, обозначая через U нормирующую сферу множества Γ, мы имеем $|x_n / U| \to 0$ и $0 \leqslant \sup\limits_{f \in \Gamma} |f(x_n)| \leqslant$ $\leqslant |x_n / U|$, откуда $\sup\limits_{f \in \Gamma} |(f(x_n)| \to 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Равно-непрерывное множество функционалов ограничено.*

Доказательство. Пусть Γ равно-непрерывное множество функционалов и U его нормирующая сфера. Возьмем любое ограниченное множество $G \subset E$. Мы будем иметь

$$\sup_{f \in \Gamma,\, x \in G} |f(x)| \leqslant \sup_{x \in G} |x / G| = |G / U| < \infty.$$

Итак, множество функционалов Γ ограничено на любом ограниченном множестве точек E. Следовательно, оно ограничено как множество точек E^*, что и требовалось доказать.

Мы будем говорить, как это обычно принято, что одна топология «слабее» другой (или вторая «сильнее» первой), если всякое множество, открытое в смысле первой топологии, открыто и в смысле второй. Это эквивалентно тому, что: если x_0 есть точка прикосновения множества G в смысле второй топологии, то x_0 есть точка прикосновения G и в смысле первой. Далее из этого следует, что: если $x_n \to x_0$ в смысле второй топологии, то $x_n \to x_0$ и в смысле первой; последнее обстоятельство обозначают, говоря, что первая сходимость «слабее» второй (вторая «сильнее» первой). Из этого следует, наконец, что: если множество G ограничено в смысле второй топологии, то оно ограничено и в смысле первой.

ТЕОРЕМА 2. *Выпуклая топология всегда слабее своей (cc) топологии.*

Доказательство. Достаточно доказать, что всякая выпуклая окрестность нуля в E (cc) открыта. Пусть U некоторая выпуклая окрестность нуля в E.

Пусть множество Γ есть множество всех $f \in E^*$, для которых U является нормирующей сферой. Согласно теореме 1, это множество ограничено, а потому

$$U_0 = \underset{x}{\mathscr{E}} (\sup_{f \in \Gamma} |f(x)| < 1)$$

есть (cc) окрестность нуля. Возьмем любое $x \in E$. Легко видеть, что $|x/U_0| = \sup_{f \in \Gamma} |f(x)|$. По определению множества Γ мы имеем $\sup_{f \in \Gamma} |f(x)| \leqslant \leqslant |x/U|$, но, согласно следствию Банаха, для некоторого $f \in \Gamma$ выполняется $f(x) = |x/U|$, а потому $|x/U_0| = \sup_{f \in \Gamma} |f(x)| = |x/U|$ и, следовательно,

$$U = \underset{x}{\mathscr{E}} (|x/U| < 1) = \underset{x}{\mathscr{E}} (|x/U_0| < 1) = U_0 .$$

Итак, открытое множество U (cc) открыто, что и требовалось доказать.

При доказательстве этой теоремы мы существенно пользовались выпуклостью топологии в E. Она неверна, вообще говоря, когда E линейное топологическое пространство.

ТЕОРЕМА 3. *Класс множеств, ограниченных в E, составляет часть класса (cc) ограниченных множеств. Если E локально выпукло, то эти два класса совпадают.*

Доказательство. Пусть $G \subset E$ ограничено. Тогда, каково бы ни было ограниченное множество $\Gamma \subset E^*$, мы должны иметь

$$\sup_{x \in G,\ f \in \Gamma} |f(x)| < \infty,$$

но это и означает, что G (cc) ограничено. В самом деле, какое бы мы ни взяли множество U из приведенного семейства (cc) открытых множеств (8), мы будем иметь

$$aU = \underset{x}{\mathscr{E}} (\sup_{f \in \Gamma} |f(x)| < a) \quad \text{для} \quad a > 0,$$

а потому при достаточно большом a $G \subset aU$.

Если же E локально выпукло, то и, обратно, всякое (cc) ограниченное множество будет, по теореме 2, просто ограничено. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы класс ограниченных множеств в E^* совпадал с классом равно-непрерывных множеств, необходимо и достаточно, чтобы топология в E была сильнее (cc) топологии. Если E локально выпукло, то это значит, что обе топологии в нем совпадают.*

Доказательство необходимости. Пусть всякое ограниченное множество $\Gamma \subset E^*$ равно-непрерывно. Докажем, что топология в E сильнее (cc) топологии.

Покажем сперва, что всякое множество вида (8) содержит окрестность нуля. Итак, пусть

$$U_0 = \mathop{\mathscr{E}}_{x} (\sup_{f \in \Gamma} | f(x) | < 1),$$

где $\Gamma \subset E^*$ — ограниченное множество. По предположению Γ равно-непрерывно. Пусть U нормирующая сфера множества Γ. Тогда

$$\sup_{f \in \Gamma} | f(x) | \leqslant | x/U |$$

и, значит, $U \subset U_0$. Возьмем теперь любое (cc) открытое множество $U' \subset E$. Докажем, что оно открыто. Пусть $x_0 \in U'$. Множество $U' - x_0$ есть (cc) окрестность нуля и, согласно теореме 6 главы 1, содержит в себе (cc) окрестность нуля $\alpha P(U'_1, U'_2, \ldots, U'_n)$, где $\alpha > 0$ и множество U'_i вида (8). Но каждое U'_i содержит, как мы сейчас установили, окрестность нуля U_i, а потому

$$U' - x_0 \supset \alpha P(U'_1, U'_2, \ldots, U'_n) \supset \alpha P(U_1, U_2, \ldots, U_n) = U,$$

где U—некоторая окрестность нуля. Окончательно $x_0 + U \subset U'$, т. е. x_0 есть внутренняя точка (cc) открытого множества U'. Ввиду произвольности точки $x_0 \in U'$ множество U' открыто.

Итак, топология в E сильнее (cc) топологии. Если, сверх того, E локально выпукло, то, применяя теорему 2, мы видим, что основная и (cc) топология эквивалентны. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть топология в E сильнее (cc) топологии. Возьмем ограниченное $\Gamma \subset E^*$ и докажем, что оно равно-непрерывно.

Множество (8) $U = \mathop{\mathscr{E}}_{x} (\sup_{f \in \Gamma} | f(x) | < 1)$ есть (cc) окрестность нуля. Согласно предположению, U есть окрестность нуля. Далее, каковы бы ни были $x \in E$ и $f_0 \in \Gamma$, мы имеем

$$| f_0(x) | \leqslant \sup_{f \in \Gamma} | f(x) | = | x/U |,$$

откуда следует, что U есть нормирующая сфера, общая всем функционалам из Γ. Итак, Γ равно-непрерывно.

Применяя теорему 1, мы видим, что класс ограниченных множеств совпадает с классом равно-непрерывных множеств в E^*. Достаточность доказана.

ЛЕММА 1. *В пространстве E всякая сходящаяся в себе последовательность ограничена**.

Доказательство. Пусть E — линейное топологическое пространство, $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность. Возьмем любую окрестность нуля U. Надо установить существование такого $h > 0$, что

$$x_n \in hU, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

---

* Этот факт доказан Нейманом в (2).

Вследствие топологии E, мы можем выбрать окрестность нуля V так, чтобы $V+V\subset U$, и окрестность нуля W так, чтобы $W\subset aV$ при любом $a>1$. По W найдем N такое, что $x_n-x_N\in W$ при $n\geqslant N$. Далее найдем $h>1$ такое, что $x_n\in hV$ при $n=1, 2,\ldots, N$. При $n>N$ мы будем иметь

$$x_n=x_N+(x_n-x_N)\in hV+W\subset hV+hV\subset hU.$$

При $n\leqslant N$

$$x_n\in hV\subset h(V+V)\subset hU.$$

Таким образом, при любом n, $x_n\in hU$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5. *Если топология E сильнее* (сс) *топологии, то E^* полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}\subset E^*$—сходящаяся в себе последовательность. Согласно лемме, она ограничена, а по теореме 4 она равно-непрерывна. Пусть $U\subset E$—ее нормирующая сфера. Мы имеем

$$|f_n(x)|\leqslant|x/U|,\qquad n=1, 2, \ldots \tag{9}$$

Фиксируем произвольные $x\in E$. Из $(f_n-f_m)\to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$ следует, что $|f_n(x)-f_m(x)|\to 0$, т. е., существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. $f(x)$есть аддитивный и однородный функционал. Формула (9) показывает, что при любом $x\in E$

$$|f(x)|\leqslant|x/U|.$$

Следовательно, $f(x)$ есть линейный функционал. Докажем, что $f_n\to f$, Иначе говоря, надо доказать, что

$$\sup_{x\in G}|f_n(x)-f(x)|\to 0,$$

каково бы ни было ограниченное $G\subset E$.

Для всякого ограниченного $G\subset E$ и $\varepsilon>0$ можно указать N такое, что при $n\geqslant N$, $m\geqslant N$,

$$\sup_{x\in G}|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Фиксируем любое $n\geqslant N$ и $x\in G$. Каково бы ни было $m\geqslant N$, будем иметь $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, в пределе при $m\to\infty$

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Это имеет место для любого $x\in G$, а потому

$$\sup_{x\in G}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Итак, $f_n\to f$, что и требовалось доказать.

§3. Слабые топологии. Пространство 2-й категории

Введем в пространстве E слабую топологию. Для этой цели нам послужит приведенное семейство множеств вида

$$U=\mathop{\mathscr{E}}_{x}(|f(x)|<1), \tag{10}$$

где f пробегает пространство E^*. Множество U есть выпуклое окружение нуля, причем $|x/U| = |f(x)|$, откуда видно, что U окружает нуль открытым образом. Далее, в силу следствия Банаха, каково бы ни было $x \in E$, $x \neq 0$, среди множеств из приведенного семейства (10) найдется множество U с $|x/U| > 0$. Итак, приведенное семейство (10) удовлетворяет условиям теоремы 5 гл. 1, а потому слабая топология выпукла.

Если мы заметим, что U из семейства (10) симметрично относительно нуля, то мы сможем применить к слабой топологии теорему 6 гл. 1. Мы увидим тогда, что система множеств

$$\mathop{\mathscr{E}}_{x}(|f_1(x)| < \alpha, |f_2(x)| < \alpha, \ldots, |f_n(x)| < \alpha),$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n \subset E^*$ и $\alpha > 0$ составляет полную систему слабых окрестностей нуля в E. Из этого следует, что наша слабая топология эквивалентна той «слабой» топологии, которую Вехаузен вводил в нормированном пространстве [см. ([4]), стр. 166], а вслед за тем В. Шмульян в общем локально выпуклом пространстве [см. ([20]), стр. 426].

Так же как и выше, следствие 1 теоремы 6 гл. 1 убеждает нас, что слабая сходимость x_n к x (запись: x_n сл $\to x$) означает: $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in E^*$. Из следствия 2 теоремы 6 гл. 1 вытекает, что слабая ограниченность множества $G \subset E$ означает: $\sup_{x \in G} |f(x)| < \infty$ для любого f^*.

Слабая топология в E слабее основной и тем более второй сопряженной. Если E не локально-выпукло, слабая топология может выродиться, так же как и (cc) топология. Но, так же как и в том случае, слабая топология наверняка будет выпукла, если в E существует конечная выпуклая окрестность.

В пространстве E^* можно определить аналогичным образом слабую топологию функционалов. Для этой цели послужит нам приведенное семейство

$$V = \mathop{\mathscr{E}}_{f}(|f(x)| < 1),$$

где x пробегает все пространство E.

Слабая топология функционалов выпукла даже в том случае, когда топология в E не выпукла, а только линейна. Она, вообще говоря, не совпадает с той слабой топологией, которую можно было бы определить в E^*, рассматривая его не как пространство, сопряженное к E, а как исходное пространство, в котором за основную топологию принята сопряженная топология. С этим обстоятельством встречался еще Банах [см. ([1]), стр. 239]. Слабая топология функционалов всегда слабее собственной слабой топологии пространства E^*.

Слабая сходимость функционалов $f_n \in E^*$ к $f \in E^*$ означает, что $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in E$ (запись: f_n сл $\to f$). Слабая ограничен-

* Используя это обстоятельство, Вехаузен мог бы значительно сократить свои рассуждения в ([4]) (стр. 166 и 168).

ность множества функционалов $\Gamma \subset E^*$ означает, что $\sup\limits_{f \in \Gamma} | f(x) | < \infty$ для любого $x \in E$.

Относительно этой слабой ограниченности множеств функционалов мы докажем сейчас весьма важную теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть пространство E второй категории. Тогда всякое слабо-ограниченное множество функционалов* $\Gamma \subset E^*$ *равно-непрерывно* *.

Доказательство. Пусть $\Gamma \subset E^*$ слабо-ограниченное множество функционалов. Положим

$$U = \mathop{\mathcal{E}}_{x} (\sup_{f \in \Gamma} | f(x) | < 1).$$

Это множество выпуклое. Далее, $aU = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{x} (\sup\limits_{f \in \Gamma} | f(x) | < a)$ для $a > 0$, а потому, каково бы ни было $x \in E$, если обозначить $h = \sup\limits_{f \in \Gamma} | f(x) |$ $(0 \leqslant h < \infty)$, то

$$x \in (h + \varepsilon) U \qquad \text{при } \varepsilon > 0,$$
$$x \operatorname{non} \in (h - \varepsilon) U \qquad \text{при } 0 < \varepsilon < h.$$

Итак, U — выпуклое окружение нуля, причем

$$| x/U | = \sup_{f \in \Gamma} | f(x) |. \tag{11}$$

Последнее равенство указывает, что из $|x/U| = 1$ следует $x \operatorname{non} \in U$. Итак, U окружает нуль открытым образом.

Обозначим, как всегда, через $\overline{U}$ замыкание U. Согласно формуле (11), будем иметь

$$\overline{U} \supset \mathop{\mathcal{E}}_{x} (| x/U | \leqslant 1) = \mathop{\mathcal{E}}_{x} (\sup_{f \in \Gamma} | f(x) | \leqslant 1). \tag{12}$$

Докажем, что

$$\overline{U} = \mathop{\mathcal{E}}_{x} (| x/U | \leqslant 1). \tag{13}$$

Благодаря формуле (12) для этого достаточно показать, что $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x} (\sup\limits_{f \in \Gamma} | f(x) | \leqslant 1)$ замкнуто. Но это множество есть пересечение множеств $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x} (| f(x) | \leqslant 1)$ по всем $f \in \Gamma$, а каждое из последних является дополнением к множеству

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x} (| f(x) | > 1) = S \left[\mathop{\mathcal{E}}_{x} (f(x) > 1), \ \mathop{\mathcal{E}}_{x} (f(x) < -1) \right],$$

которое открыто вследствие непрерывности функционалов $f(x)$.

Формула (13), таким образом, установлена, а из нее следует, что

$$| \overline{U}/U | = 1.$$

Применяя к выпуклому окружению нуля открытым образом U теорему 2 гл. 2, мы видим, что U открыто. Формула (11) указывает теперь, что U есть нормирующая сфера множества Г. Итак, Г равно-непрерывно, что и требовалось доказать.

* Ср. ([5]), стр. 153.

Следствие 1. *Если E второй категории, то класс ограниченных множеств в пространстве E^* совпадает с классом равно-непрерывных множеств.*

В самом деле, по теореме 1 любое равно-непрерывное множество функционалов ограничено. Но всякое ограниченное множество функционалов тем более слабо ограничено и, согласно теореме 6, равно-непрерывно.

Следствие 2. *Если E второй категории, то его топология сильнее (cc) топологии. Если, кроме того, пространство E локально выпукло, то эти две топологии совпадают.*

Это следует из теоремы 4 и из предыдущего следствия 1.

Следствие 3. (Принцип сгущения особенностей). *Если E второй категории, то всякое слабо ограниченное множество линейных функционалов ограничено *.*

Это следует из только что доказанной теоремы и из теоремы 1.

Мы называем следствие 3 принципом сгущения особенностей, потому что его утверждение эквивалентно следующему:

если для последовательности $f_n \in E^*$ существует ограниченная последовательность $x_n \in E$ с $\lim\limits_{n\to\infty} | f_n(x_n) | = \infty$, то существует $x \in E$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} | f_n(x) | = \infty$.

В такой своей форме следствие 3 действительно является своего рода принципом сгущения особенностей для последовательности линейных функционалов [см. ([1]), стр. 24 и 81].

Следствие 4. *Если E второй категории, то E^* полно.*

Это следует из теоремы 5 и следствия 2.

По свидетельству Банаха в ([1]), стр. 239, С. Мазур заметил, что некоторые теоремы Банаха о линейных функционалах в нормированном пространстве остаются верными в пространстве типа (F), если в условиях теорем требование ограниченности норм $| f_n |$ функционалов $f_n \in E^*$ заменить требованием, чтобы последовательность $f_n(x)$ была ограничена на некоторой окрестности нуля.

Сравним теперь, после доказательства теоремы 6, это обобщение с нашим.

Пусть последовательность $f_n(x)$ ограничена на некоторой окрестности нуля U_0

$$\sup_{x \in U_0,\ n=1,2,\ldots} | f_n(x) | = a < \infty.$$

Обозначим через U выпуклую оболочку U_0, т. е. соединение всех множеств вида $\lambda_1 U_0 + \lambda_2 U_0 + \ldots + \lambda_n U_0$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Как соединение окрестностей нуля, это есть окрестность нуля и к тому же выпуклая.

---

* Ср. ([1]) стр., 80, теорема 5.

Вследствие линейности $f_n(x)$, мы будем иметь

$$\sup_{x \in \overline{U},\ n=1,\ 2, \dots} |f_n(x)| = a$$

Возьмем любое $x \in E$. Мы имеем, согласно замечанию 1, гл. 2, § 1,

$$\overline{U} = \mathop{\mathscr{E}}_{x} (|x/U| \leqslant 1),$$

а потому $\frac{x}{|x/U|} \in \overline{U}$ и, следовательно, каково бы ни было n,

$$\left| f_n\left(\frac{x}{|x/U|}\right) \right| \leqslant a,$$

откуда

$$\left| f_n(x) \right| \leqslant \left| x/\frac{1}{a} U \right|.$$

Мы видим, что $\frac{1}{a}\, U$ есть нормирующая сфера последовательности. Итак, эта последовательность равно-непрерывна.

Если, наоборот, последовательность f_n равно-непрерывна, то ясно, что она будет ограничена на некоторой окрестности нуля, например, на своей нормирующей сфере.

Предшествующее рассуждение показывает нам, что обобщение Мазура сводится к тому, чтобы называть «ограниченным» равно-непрерывное в нашем смысле множество функционалов. Пространство типа (F), которое имел в виду Мазур, есть линейное топологическое пространство 2-й категории. Согласно следствию 1 теоремы 6, «ограниченность» множества функционалов в смысле Мазура совпадает для такого пространства с ограниченностью в нашем смысле.

Однако, в пространстве 1-й категории это будет не всегда так. Теорема 1 этой главы в общем случае не может быть усилена даже если ограничиваться только локально-выпуклыми пространствами, а потому класс множеств функционалов «ограниченных» в смысле Мазура будет составлять лишь правильную часть класса множеств, ограниченных в нашем смысле.

В качестве примера возьмем любое пространство E типа (B), считая основной его топологией слабую топологию. Пространство линейных функционалов E^*, по самому определению слабой топологии, будет такое же, как и для пространства E с топологией по норме. Но так как класс слабо ограниченных множеств в нормированном пространстве совпадает с классом ограниченных множеств [([1]), стр. 80, теорема 6], то топология в E^*, сопряженная к слабой топологии нормированного пространства E, будет совпадать с топологией, сопряженной к топологии E по норме, т. е. будет являться топологией функционалов по норме.

Отсюда следует, что вторая сопряженная топология в E будет топологией по норме в E.

Итак, если в пространстве E типа (B) за основную топологию принять слабую топологию, то (cc) топология будет совпадать с топологией по норме. Теперь достаточно взять в качестве E такое пространство

типа (B), в котором топология по норме не эквивалентна слабой топологии, чтобы получить пример локально выпуклого пространства, где основная топология и (cc) топология не эквивалентны друг другу. Теоремы 1 и 4 убеждают нас, что в E существуют ограниченные, но не равнонепрерывные множества функционалов.

§ 4. Полное пространство. Пространство 2-й категории

Полное метрическое пространство—2-й категории. Но неметрическое локально-выпуклое пространство может быть полным и 1-й категории [см. ([4]), стр. 167]. Мы установили в предыдущем параграфе принцип сгущения особенностей для E, предполагая, что E 2-й категории. Сейчас мы распространим этот принцип на полные пространства E.

ЛЕММА 2. *Пусть E локально выпукло и полно. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел с $\sum_1^\infty a_n < \infty$ и $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность точек E. Тогда ряд $y = \sum_1^\infty a_n x_n$ сходится в E, т. е. $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = \sum_1^n a_i x_i$.*

Доказательство. Пусть U — выпуклая окрестность нуля. Мы имеем для $n < m$

$$|y_m - y_n / U| = \left| \sum_{n+1}^m a_i x_i / U \right| \leqslant \sum_{n+1}^m a_i |x_i / U|.$$

Вследствие же ограниченности $\{x_n\}$ мы имеем $|x_i / U| \leqslant h$ $(i = 1, 2, \ldots)$, а потому

$$|y_m - y_n / U| \leqslant h \sum_{n+1}^m a_i.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать N такое, что при $n, m > N$ $\sum_{n+1}^m a_i < \frac{\varepsilon}{h}$. Для этих значений n и m будет $|y_m - y_n / U| \leqslant \varepsilon$. Итак $(y_m - y_n) \to 0$, когда $n \to \infty$ и $m \to \infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Если локально-выпуклое пространство E полно, то всякое слабо ограниченное множество функционалов ограничено.*

Доказательство. Благодаря доказанной сейчас лемме, доказательство этой теоремы может быть заимствовано из заметки Л. Канторовича ([18]), где она доказана в совершенно иных предположениях. Соответствующие свойства пространства, необходимые при доказательстве Л. Канторовича, будут заменены у нас свойством, доказанным в лемме.

Будем доказывать от противного. Предположим, что последовательность $\{f_n\} \subset E^*$ не ограничена. Докажем, что тогда она даже не слабо ограничена.

Согласно предположению, существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ таких, что $\varepsilon_n f_n$ не стремится к 0. Переходя к частичной последовательности ε_{n_k}, мы можем добиться того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{\varepsilon_{n_k}}| < \infty \tag{14}$$

и

$$\varepsilon_{n_k} |f_{n_k}(x_k')| \geqslant \delta > 0. \tag{14-bis}$$

для некоторой ограниченной последовательности $\{x_k'\} \subset E$. Положим

$$q_k = \sqrt{\varepsilon_{n_k}} f_{n_k}, \tag{15}$$

$$x_k = \sqrt{\varepsilon_{n_k}} x_k'. \tag{15-bis}$$

Если для какого-то x_{k_0}, $q_n(x_{k_0})$ не стремится к 0 при $n \to \infty$, то тогда $\lim\limits_{k \to \infty} |f_{n_k}(x_{k_0})| = \infty$, и теорема доказана.

Предположим теперь, что для любого x_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$g_n(x_k) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{16}$$

Но $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, а потому для любого g_n $(n = 1, 2, \ldots)$

$$g_n(x_k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{16-bis}$$

Определим теперь по индукции последовательность целых чисел m_k так, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} |g_{m_1}(x_{m_k})| \leqslant \frac{1}{2^k}, \ldots, |g_{m_{k-1}}(x_{m_k})| \leqslant \frac{1}{2^k} \\ |g_{m_k}(x_{m_1})| \leqslant \frac{1}{k2^k}, \ldots, |g_{m_k}(x_{m_{k-1}})| \leqslant \frac{1}{k2^k}. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Это возможно вследствие формул (16), (16-bis).

Согласно лемме, из (14), ограниченности $\{x_n'\}$ и (15-bis) следует, что последовательность $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{m_k}$ сходится в себе. Так как E полно, существует

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{m_k}.$$

Формулы (17) дают нам для любого k

$$|g_{m_k}(x_0) - g_{m_k}(x_{m_k})| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Из (14-bis), (15), (15-bis) вытекает теперь

$$g_{m_k}(x_0) \geqslant \delta - \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Итак, последовательность g_n не сходится слабо к нулю. Согласно (15), последовательность f_n не слабо ограничена, что и требовалось доказать.

Мы установили принцип сгущения особенностей в двух предположениях: а) E 2-й категории, б) E полно. В общем случае он не имеет места.

ТЕОРЕМА 8. *Если выпуклая топология в E эквивалентна (сс) топологии, то всякое слабо ограниченное множество точек E ограничено.*

Доказательство. Пусть $G \subset E$ слабо ограничено. Если рассматривать G как множество из E^{**}, то оно есть слабо ограниченное множество линейных функционалов, определенных в E^*. Согласно теореме 5, E^* полно. Из теоремы 7 следует, что G (сс) ограничено, т. е. просто ограничено, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если локально-выпуклое пространство E 2-й категории, то всякое слабо ограниченное множество в нем ограничено* [ср. ([1]), стр. 80, теорема 6].

Для доказательства достаточно применить следствие 2 теоремы 6.

Для линейного топологического пространства E последнее утверждение неверно. Например, нигде не выпуклое пространство все целиком есть слабо ограниченное множество. Можно показать, на чем мы сейчас не будем останавливаться, что следствие теоремы 8 неверно даже для такого линейного топологического пространства, в котором существует выпуклая конечная окрестность нуля.

ТЕОРЕМА 9. *Если E 2-й категории, то для слабой сходимости последовательности $f_n \in E^*$ необходимо и достаточно, чтобы*

1) *последовательность $\{f_n\}$ была ограничена,*

2) *последовательность чисел $f_n(x)$ сходилась на везде плотном множестве точек x.* *

Необходимость вытекает из следствия 3 теоремы 6. Достаточность может быть легко установлена, если использовать то, что ограниченная последовательность $\{f_n\}$, согласно следствию 1 теоремы 6, равномерно непрерывна.

Пространство E называется сепарабельным, если в нем некоторое исчислимое множество точек везде плотно.

ТЕОРЕМА 10. *Если E 2-й категории и сепарабельно, то всякое ограниченное множество функционалов слабо компактно (т. е. любая ограниченная последовательность f_n содержит частичную последовательность, слабо сходящуюся к некоторому $f \in E^*$)***.

В самом деле, достаточно при помощи диагонального процесса выделить из $\{f_n\}$ последовательность, сходящуюся в каждой точке везде плотного исчислимого множества.

Глава 4

Пространство секвенциально линейных функционалов

Эта глава параллельна предшествующей. Ее смысл заключается в следующем. Многие результаты главы 3 получены нами в предположе-

* Ср. ([1]), стр. 123 и 154.
** Ср. ([1]), стр. 123, теорема 3, и стр. 239.

нии, что E 2-й категории (теоремы 6, 9, 10). Такое предположение имеет смысл, когда E — метрическое пространство. Тогда мы имеем возможность легко установить, что E 2-й категории, установив, что оно полно, а последнее обычно не представляет затруднений. Но именно в том случае, когда E — линейное топологическое метрическое и полное пространство, т. е. пространство типа (F), упомянутые теоремы главы 3 становятся элементарнейшими частными случаями теорем С. Мазура и В. Орлича из ([5]) и из ([1]), стр. 239. В том же случае, когда E — общее линейное топологическое пространство, мы не имеем никакого простого критерия того, что оно 2-й категории.

В этой главе мы получим те же результаты, исходя из предположений, касающихся сходимости элементов в E. Таким образом, можно было бы сказать, что мы покидаем «окрестностную» точку зрения и становимся на «секвенциальную», если бы мы не оставляли в силе предположения, что E локально-выпукло. Так, в теореме 7 прошлой главы мы соединили предположение, что E локально-выпукло с чисто секвенциальным предположением, что E полно.

Итак, в дальнейшем всегда пространство E есть локально-выпуклое пространство. Мы будем оговаривать лишь дополнительные предположения относительно E. Что же касается возможных обобщений на линейное топологическое пространство, то они совершенно аналогичны тем, которые указывались в гл. 3. Дело в том, что каждое утверждение гл. 4 дуально к некоторому утверждению гл. 3. Поэтому, пользуясь текстом гл. 3, можно без труда провести и в гл. 4 обобщение на линейные топологические пространства.

В дальнейшем мы не будем останавливаться на этом.

§ 1. Секвенциальная топология

Нам придется прежде всего выяснить некоторые принципиальные факты, относящиеся к секвенциальной топологии.

Аналогично определению «точки прикосновения множества $G \subset E$», данному в гл. 2, § 1, дадим сначала определение «предельной точки множества $G \subset E$».

Мы будем называть $x_0 \in E$ предельной точкой множества G, если существуют $x_n \in G$ $(n = 1, 2, \ldots)$ со свойством $x_n \to x_0$.

Таким образом, всякая предельная точка множества G есть и его точка прикосновения [см. определение сходимости в §§ 1, 3]. В метрическом пространстве верно и обратное. Это следует из того, что метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Множество $F \subset E$, содержащее все свои предельные точки, будем называть секвенциально замкнутым. Таким образом, всякое замкнутое множество непременно секвенциально замкнуто. В метрическом пространстве верно и обратное. Множество $U \subset E$ мы будем называть секвенциально открытым, если его дополнение секвенциально замкнуто.

Таким образом определяется секвенциальная топология в пространстве E. Если E — метрическое пространство, то секвенциальная топология совпадает с основной, но в общем случае это не так. Секвенциальная топология в иных случаях может быть даже топологией по норме, а основная только выпуклой. Так, например, если в пространстве l суммируемых последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, где $\| x \| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$, за основную топологию принять слабую топологию элементов, то нормальная топология будет секвенциальной топологией [см. ([1])]. Между тем эти две топологии в l неэквивалентны; в самом деле, со второй топологией l локально-конечно, а с первой нет [см.([4]), стр. 168, теорема 17], значит, в этом случае основная топология не есть топология по норме.

Для секвенциальной топологии удовлетворены, как это легко установить, аксиомы 1, 2 гл. 1, § 2. Следовательно, для каждого множества $G \subset E$ существует секвенциальное замыкание $\widehat{G} \subset E$, т. е. наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее G. Очевидно,

$$\widehat{G} \subset \overline{G}. \tag{1}$$

Для того чтобы уяснить себе, в каком соотношении находятся множества G и $\widehat{G}$, сделаем следующее. Присоединим к G все его предельные точки и обозначим построенное таким образом множество через G_1. Предельные точки соединения множеств G и G_1 составят множество G_2. Так мы получим, продолжая этот процесс, своего рода бэровскую надстройку над множеством G. Легко видеть, что вся эта бэровская надстройка в целом, т. е. G_Ω, где Ω — первое трансфинитное число третьего класса ординальных чисел, есть секвенциально-замкнутое множество, причем

$$\widehat{G} = G_\Omega.*$$

Исследование подобной бэровской надстройки для секвенциальной слабой топологии функционалов в пространстве типа (B) см. ([1]), стр. 208—217.

Функционал $f(x)$, непрерывный в смысле секвенциальной топологии, мы будем называть секвенциально-непрерывным. Можно легко установить, что функционал $f(x)$, определенный на E, секвенциально-непрерывен тогда и только тогда, когда $x_n \to x$ всегда влечет $f(x_n) \to f(x)$ [см. ([12]), стр. 492]. Всякий непрерывный функционал секвенциально-непрерывен. В метрическом пространстве верно и обратное.

То, что мы назвали секвенциальной непрерывностью, есть весьма естественное понятие, которое Г. М. Фихтенгольц в ([13]) называет просто «непрерывностью».

Секвенциально-линейным мы будем называть функционал $f(x)$ аддитивный и секвенциально-непрерывный. Линейное пространство всех

---

* См. об этом в работе Ф. Хаусдорфа ([12]), стр. 490 и 493.

секвенциально-линейных функционалов f, определенных на E, мы будем обозначать через E°. Очевидно, $E^* \subset E^\circ$.

Сопряженная топология и слабая топология функционалов, которые были раньше определены в E^*, могут быть легко продолжены на все пространство E°. Это можно осуществить при помощи приведенных семейств, взятых соответственно в виде (4) и (7) (см. гл. 3), где надо считать f точками E°, удовлетворяющими условию, написанному в ( ). Пространство E° будет локально-выпукло как со своей основной (сопряженной), так и со своей слабой топологией функционалов. Сходимость элементов E° будет иметь тот же смысл, что и выше, т. е.

I) $f_n \to 0$, если $f_n(x_n) \to 0$, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset E$.

II) f_n сл $\to 0$, если, каково бы ни было $x \in E$, $f_n(x) \to 0$.

Ограниченность множеств функционалов будет иметь тот же смысл, что и в гл. 3, т. е.

I-а) $\{f_n\} \subset E^\circ$ ограничена, если, какова бы ни была ограниченная $\{x_n\} \subset E$, $\{f_n(x_n)\}$ ограничена.

II-а) $\{f_n\} \subset E^\circ$ слабо ограничена, если, каково бы ни было $x \in E$, $\{f_n(x)\}$ ограничена.

Теперь мы можем снова определить (*cc*) топологию и слабую топологию в E. Отправляясь от пространства E° с сопряженной топологией, можно построить пространство $E^{\circ\circ}$ и, как легко видеть, $E \subset E^{\circ\circ}$, а потому вторая сопряженная топология и слабая топология функционалов в $E^{\circ\circ}$ определены, в частности, в пространстве E. Непосредственно они могут быть определены при помощи приведенных семейств соответственно (8) и (10) в гл. 3. Но теперь мы будем считать в формуле (8) гл. 3, что Г пробегает класс всех ограниченных множеств пространства E°, т. е. класс более обширный, чем в гл. 3; в формуле же (10) гл. 3 мы будем считать, что f пробегает все пространство E°. Итак, (*cc*) топология и слабая топология элементов в том смысле, в каком эти термины будут употребляться в этой главе, есть более сильные топологии, нежели соответственно (*cc*) топология и слабая топология элементов в гл. 3.

Таким образом,

III) последовательность x_n (*cc*) $\to 0$, если, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{f_n\} \subset E^\circ$, $f_n(x_n) \to 0$;

IV) последовательность x_n сл $\to 0$, если, каково бы ни было $f \in E^\circ$, $f(x_n) \to 0$.

III-а) $\{x_n\} \subset E$ (*cc*) ограничена, если, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{f_n\} \subset E^\circ$, $\{f_n(x_n)\}$ ограничено;

IV-а) $\{x_n\} \subset E$ слабо ограничена, если, каково бы ни было $f \in E^\circ$, $\{f(x_n)\}$ ограничено.

Пространство E°, с которым мы имеем дело в этой главе, рассматривалось Фихтенгольцем в ([13]). Согласно его терминологии, E° — это семейство функционалов, порожденное основной сходимостью пространства E. Условия, которые Фихтенгольц налагает на сходимость

[см. ([13]), стр. 195, условия I — IV], очевидно, выполнены всегда, когда E — линейное топологическое пространство. Слабая сходимость элементов E есть в терминах Фихтенгольца «сходимость, порожденная семейством E°» [см. ([13]), стр. 197].

§ 2. Равно-непрерывность и (*cc*) сходимость

Согласно определению секвенциальной непрерывности, естественно назвать множество функционалов $\Gamma \subset E^\circ$ равно-непрерывным, если оно таково, что всегда $x_n \to 0$ влечет $f(x_n) \to 0$ равномерно на Γ. Класс таких множеств более обширен, чем класс равно-непрерывных множеств в смысле гл. 3.

На языке последовательностей — языке этой главы — определение равно-непрерывности, как нетрудно видеть, может быть сформулировано так:

I-b) последовательность $\{f_n\} \subset E^\circ$ называется равно-непрерывной, если, коль скоро $x_n \to 0$, выполняется $f_n(x_n) \to 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Равно-непрерывное множество функционалов ограничено.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для равно-непрерывной последовательности. Итак, пусть $\{f_n\} \subset E^\circ$ равно-непрерывна. Предположим, что $\{f_n\}$ не ограничена. Тогда, согласно I-a, для какой-то ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset E$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, |f_n(x_n)| = \infty.$$

Следовательно, существуют такие положительные $\varepsilon_n \to 0$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, |\varepsilon_n f_n(x_n)| = \infty.$$

С другой стороны, последнее соотношение невозможно, потому что $\{x_n\}$ ограничено, а значит $\varepsilon_n x_n \to 0$ и вследствие равно-непрерывности $\{f_n\}$ должно быть (см. I-b)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varepsilon_n x_n) = 0.$$

Следовательно, $\{f_n\}$ ограничена, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Сходимость в E слабее (cc) сходимости.*

Доказательство. Наша (*cc*) топология, как мы замечали, сильнее (*cc*) топологии в смысле гл. 3, т. е., согласно теореме 2 гл. 3, она сильнее основной топологии в E. Следовательно, и (*cc*) сходимость сильнее основной.

ТЕОРЕМА 3. *Класс множеств, ограниченных в E, совпадает с классом (cc) ограниченных множеств в E.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset E$ ограничено. Тогда (см. I-a), каково бы ни было ограниченное $\{f_n\} \subset E^\circ$, $\{f_n(x_n)\}$ ограничено. Это и означает (см. III-a), что $\{x_n\}$ (*cc*) ограничено.

Если теперь $\{x_n\}$ (cc) ограничено, то оно будет и просто ограничено в силу теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы класс ограниченных множеств секвенциально линейных функционалов совпадал с классом равно-непрерывных множеств, необходимо и достаточно, чтобы сходимость в E совпадала с (cc) сходимостью* *.

Доказательство необходимости. Пусть всякое ограниченное множество $\Gamma \subset E^\circ$ равно-непрерывно. Докажем, что сходимость в E сильнее (cc) сходимости. Очевидно, достаточно доказать, что всякая последовательность x_n, стремящаяся к нулю, будет и (cc) стремиться к нулю. Пусть $x_n \to 0$. Возьмем любую ограниченную $\{f_n\} \subset E^\circ$ и рассмотрим последовательность чисел $f_n(x_n)$. Ввиду равно-непрерывности $\{f_n\}$ имеем (см. I-b) $f_n(x_n) \to 0$. Следовательно, согласно III, $x_n\,(cc) \to 0$. Таким образом, сходимость в E сильнее (cc) сходимости. Применяя теорему 2, мы видим, что сходимости эти эквивалентны. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть сходимость в E эквивалентна (cc) сходимости. Докажем, что всякое ограниченное множество в E° равно-непрерывно. Предположим, что $\{f_n\} \subset E^\circ$ ограничено. Пусть $x_n \to 0$; рассмотрим последовательность чисел $f_n(x_n)$. Так как $x_n\,(cc) \to 0$, то должно быть $f_n(x_n) \to 0$. Итак, согласно I-b, $\{f_n\}$ равно-непрерывно. Достаточность доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Если сходимость в E совпадает с (cc) сходимостью, то пространство E° полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится в себе. Тогда она ограничена и, согласно теореме 4, равно-непрерывна.

В силу того, что $\{f_n\}$ сходится в себе, существует и везде конечен

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

$f(x)$ есть аддитивный и однородный функционал, определенный на E. Докажем, что он секвенциально непрерывен.

Пусть $x_n \to 0$. Тогда

$$|f(x_n)| \leqslant \sup_m |f_m(x_n)|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Вследствие равно-непрерывности $\{f_m\}$ мы получаем $f(x_n) \to 0$. Отсюда из аддитивности $f(x)$ следует, что $x'_n \to x$ влечет $f(x'_n) \to f(x)$. Итак, $f \in E^\circ$. Наконец, буквально так же, как при доказательстве теоремы 5 гл. 3, мы докажем, что $f_n \to f$.

§ 3. Устойчивая сходимость

Сходимость элементов в E называется устойчивой, если для всякой последовательности $x_n \in E$, $x_n \to 0$ существует последовательность вещественных положительных $a_n \to \infty$ такая, что последовательность $\{a_n x_n\}$ ограничена.

* Это еще не значит, что топология в E совпадает с (cc) топологией.

Это определение устойчивости сходимости в линейном топологическом пространстве эквивалентно «устойчивости сходимости» в том смысле, в каком этот термин употребляет Г. М. Фихтенгольц в ([13]) (стр. 196 и дальше).

Метрическая сходимость, т. е. сходимость элементов в линейном топологическом пространстве, например, в пространстве типа (F), устойчива [см. ([5]), стр. 153]. Но мы увидим в дальнейшем, что сходимость может быть устойчива, не будучи метрической.

ТЕОРЕМА 6. *Если сходимость в E устойчива, то всякое ограниченное множество секвенциально-линейных функционалов равно-непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\} \subset E^\circ$ — ограниченная последовательность и $x_0 \to 0$. Согласно предположению, существуют $a_n > 0$, $a_n \to \infty$ такие, что $\{a_n x_n\}$ ограничена. Вследствие I-a $\{f_n(a_n x_n)\}$ ограничена. Но тогда $\frac{1}{a_n} f_n(a_n x_n) = f_n(x_n) \to 0$. Итак, по определению I-b, $\{f_n\}$ равномерно непрерывна, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если сходимость в E устойчива, то она совпадает с (cc) сходимостью.*

Это следует из теорем 1, 6 и 4.

Следствие 2. *Если сходимость в E устойчива, то E° полно.*

Это следует из теоремы 5 и следствия 1.

ТЕОРЕМА 7. *Если E полно, то всякое слабо ограниченное множество секвенциально линейных функционалов ограничено.*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 7 гл. 3, поскольку мы пользовались при доказательстве последней лишь секвенциальной непрерывностью линейных функционалов, и поскольку лемма, на которую мы опирались при доказательстве, имеет место и теперь.

ТЕОРЕМА 8. *Если сходимость в E эквивалентна (cc) сходимости, то всякое слабо ограниченное множество точек E ограничено.*

Доказательство заключается в применении теоремы 7 к E°, имея в виду, что это последнее полно, согласно теореме 5. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 8 гл. 3.

Следствие. *Если сходимость в E устойчива, то всякое слабо ограниченное множество его точек ограничено.*

В самом деле, надо лишь применить следствие теоремы 6 и теорему 8.

Множество $D \subset E$ такое, что $\widehat{D} = E$, мы будем называть секвенциально-плотным в E. Если в пространстве E существует исчислимое множество, секвенциально плотное в E, то будем говорить, что E секвенциально сепарабельно.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть E полно и сходимость в нем устойчива. Для того чтобы последовательность $\{f_n\} \subset E^\circ$ была слабо сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы*

A) *$\{f_n\}$ была ограничена,*

B) *последовательность чисел $f_n(x)$ сходилась на секвенциально плотном в E множестве точек x.*

Доказательство необходимости. Если $\{f_n\}$ сл $\to f$, то A) следует из этого на основании теоремы 7, а B) по определению II.

Доказательство достаточности. Пусть $\{f_n\}$ ограничена и $f_n(x)$ сходится на секвенциально плотном в E множестве D.

Докажем, что $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует и конечен во всех точках E. Согласно II это значит, что последовательность f_n слабо сходящаяся в себе. Следовательно, надо доказать, что для любых $x_0\in E$ и $\varepsilon>0$ найдется N такое, что при $n\geqslant N$, $m\geqslant N$ выполняется

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leqslant\varepsilon.$$

Итак, возьмем любое x_0 и $\varepsilon>0$. Положим

$$U=x_0+\mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(\sup_n|f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{2}$$

Так как $\{f_n\}$, по предположению, ограничено, то U есть некоторая (сс) окрестность точки x_0 [ср. формулу (8) гл. 3]. Будучи (сс) открытым, множество U тем более секвенциально (сс) открыто. Согласно следствию теоремы 6, множество U будет и просто секвенциально открыто. Следовательно, $P(D, U)$ не пусто. Пусть

$$x_1\in P(D, U). \tag{3}$$

Согласно B) можно указать такое N, что при $n\geqslant N$, $m\geqslant N$ выполняется

$$|f_n(x_1)-f_m(x_1)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

При этих значениях m и n мы будем иметь:

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leqslant|f_n(x_0-x_1)-f_m(x_0-x_1)|+|f_n(x_1)-f_m(x_1)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_n(x_0-x_1)|+|f_n(x_1)-f_m(x_1)|+|f_m(x_0-x_1)|\,[\text{согласно (2), (3), (4)}]\leqslant\varepsilon.$$

Итак, функционал $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определенен и конечен на всем пространстве E. Совершенно так же, как при доказательстве теоремы 5 (гл. 3), мы установим, что $f\in E^{\circ}$. Наконец, по самому его определению, f_n сл $\to f$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть E полно, и сходимость в нем устойчива. Если E секвенциально-сепарабельно, то всякое ограниченное множество секвенциально линейных функционалов слабо компактно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10 гл. 3.

Заметим, что, согласно формуле (1), требование секвенциальной сепарабельности более сильно, чем требование сепарабельности пространства E. Соответственно и результат теоремы более сильный, чем в гл. 3.

Мы можем теперь подвести итог нашему очерку простейших свойств пространства E по отношению к сопряженному с ним пространству E° или E°. Оказывается, полнота пространства в соединении с устойчивостью

сходимости в нем влечет за собой те же свойства пространства E по отношению к E°, какие влечет за собой тот факт, что E 2-й категории, по отношению к E^{*}.

Построение примеров

Мы уже говорили о том, что некоторые основные результаты, полученные нами, становятся частными случаями теорем С. Мазура и В. Орлича в том случае, когда E — пространство типа (F). Это относится к теоремам 6, 7, 9, 10 гл. 3 и к соответствующим теоремам гл. 4.

В связи с этим мы ставим себе в настоящем параграфе задачу — построить пример такого пространства, которое было бы локально выпуклым, полным и 2-й категории (предмет исследования гл. 3) и такого пространства, которое было бы локально выпуклым, полным и с устойчивой сходимостью (см. гл. 4), причем оба пространства не были бы метрическими.

Таким образом, будет показано, что наши результаты являются существенным обобщением результатов Мазура и Орлича, в свою очередь являющихся обобщением результатов Банаха.

Мы построим два упомянутых примера в том порядке, в котором они сейчас назва[illegible] этом мы будем опираться на следующие факты.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть E — линейное топологическое пространство. Пусть $\mathfrak{U}$ — полная система окрестностей нуля в E. Предположим, что, каковы бы ни были последовательности $U_n \in \mathfrak{U}$ и $x_n \in E$ таких, что $x_{n+1} + U_{n+1} \subset x_n + U_n$, множество*

$$P(x_1 + \overline{U}_1, x_2 + \overline{U}_2, \ldots)$$

не пусто. Тогда E — 2-й категории.

Доказательство. Предположим, что, напротив,

$$E = S(G_1, G_2, \ldots),$$

где каждое G_n нигде не плотно $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть U_0 — любая окрестность нуля. Очевидно, должны существовать последовательность $U_n \in \mathfrak{U}$ и последовательность $x_n \in E$ такие, что

$$x_{n+1} + U_{n+1} \subset x_n + U_n, \quad x_0 = 0,$$

и

$$P(G_n, x_n + \overline{U}_n) \quad \text{пусто} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Эта последовательность может быть определена по индукции. Согласно построению этой последовательности, множество $P[S(G_1, G_2, \ldots), P(x_1 + \overline{U}_1, x_2 + \overline{U}_2, \ldots)]$ оказывается пустым, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если в линейном топологическом пространстве E существует последовательность линейных функционалов $f_n \neq 0$ таких, что, каковы бы ни были вещественные числа a_n, $a_n f_n$ сл $\to 0$, то E I-й категории.*

Доказательство. Обозначим

$$F_n = \underset{x}{\mathcal{E}} (f_n(x) = 0), \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

F_n образуют последовательность замкнутых множеств. Каждое из F_n нигде не плотно. В самом деле, F_n обладает свойством: каково бы ни было $x_0 \in F_n$ и вещественное a, $F_n - x_0 = F_n$ и $aF_n = F_n$. Будь F_n плотным в некотором открытом множестве, оно было бы плотным в некоторой окрестности нуля, а отсюда следовало бы, что оно везде плотно, и, наконец, в силу замкнутости F_n $E = F_n$, т. е. $f_n = 0$, что противоречит предположению.

Докажем, что

$$E = S(F_1, F_2, \ldots). \tag{5}$$

Предположим противное. Тогда существует $x_0 \in E$ такое, что $f_n(x_0) = r_n \neq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\frac{1}{r_n} f_n$ не сл $\to 0$, потому что $\frac{1}{r_n} f_n(x_0) = 1$. Это противоречит предположению относительно $\{f_n\}$. Таким образом, формула (5) доказана, а вместе с ней и теорема.

Установив эти предварительные факты, переходим к построению интересующих нас пространств.

Пусть Q — бесконечное множество элементов q. Обозначим через E_Q линейное пространство функций $x(q)$ с вещественными значениями, определенных на Q.

Топологизируем E_Q при помощи приведенного семейства

$$U = \underset{x}{\mathcal{E}} (|x(q)| < 1), \tag{6}$$

где q пробегает все множество Q.

Подобное приведенное семейство удовлетворяет условиям теоремы 5 гл. 1, а потому определяемая им в E_Q топология выпукла. Более того, оно удовлетворяет условиям теоремы 6, а потому полная система окрестностей нуля в E_Q имеет вид

$$\underset{x}{\mathcal{E}} (|x(q_1)| < \varepsilon, \ldots, |x(q_n)| < \varepsilon), \tag{7}$$

где

$$\varepsilon > 0 \ \text{ и } q_1, q_2, \ldots, q_n \subset Q.$$

Таким образом, топология пространства E_Q совпадает с топологией вещественных функций, введенной А. Тихоновым в ([15]) на стр. 762 для того случая, когда q — вещественные числа, а $Q = (0,1)$.

Если множество Q исчислимо, то пространство E_Q становится пространством s числовых последовательностей. Тогда топология 6 есть метрическая, как порожденная исчислимым приведенным семейством (см. гл. 1, § 3). Согласно формуле (9) гл. 1, эта топология эквивалентна обычной метрической топологии пространства s [см. ([1]), стр. 10].

Возвращаясь снова к общему случаю любого Q, отметим, что, согласно следствию 1 теоремы 6 гл. 1, сходимость последовательности $x_n \in E_Q$ означает сходимость функций $x_n(q)$ в каждой точке Q. Таким образом, E_Q полно.

Ограниченность множества $G \subset E_Q$ означает, согласно следствию 2 предложения 6 гл. 1, что функция

$$X(q) = \sup_{x \in G} |x(q)|$$

везде конечна, т. е. $X \in E_Q$.

Докажем, что для E_Q выполнены условия теоремы 1. Для этого введем понятие опорных точек и диаметра окрестности нуля (7). Именно, опорными точками окрестности нуля $U \subset E_Q$, определенной формулой (7), мы будем называть точки $q_1, q_2, \ldots, q_n$ из (7). Диаметром U мы будем называть число 2ε, где ε — число из (7).

Опорной точкой семейства Φ окрестностей вида (7) мы будем называть всякую точку $q \in Q$, которая является опорной точкой хоть одного $U \in \Phi$.

Заметим, что, как легко показать, если U — окрестность нуля вида (7), то $\overline{U}$ может быть получена путем замены в формуле (7) всех знаков $<$ на $\leqslant$.

Предположим теперь, что нам дана последовательность U_n окрестностей вида (7) и последовательность элементов $x_n \in E_Q$ таких, что

$$x_{n+1} + U_{n+1} \subset x_n + U_n. \tag{8}$$

Построим такой элемент $x \in E_Q$, т. е. такую функцию $x(q)$, для которой $x \in P(x_1 + \overline{U}_1, x_2 + \overline{U}_2, \ldots)$.

В тех точках Q, которые не являются опорными точками последовательности U_n, функцию $x(q)$ можно определить произвольным образом.

Пусть теперь q есть опорная точка последовательности U_n. Пусть $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots$ есть те из U_n, для которых q—опорная точка, $2\varepsilon_{n_1}, 2\varepsilon_{n_2}, \ldots$ их диаметры. Из (8) следует, что $n_{1+k} = n_1 + k$.

Какое значение может иметь число $y(q)$, если y есть элемент E, принадлежащий множеству $x_{n_k} + U_{n_k}$? Очевидно, $|y(q) - x_{n_k}(q)| \leqslant \varepsilon_{n_k}$, т. е. число $y(q)$ должно заключаться в замкнутом интервале длины $2\varepsilon_{n_k}$ с центром в $x_{n_k}(q)$. Обозначим этот интервал через I_k. Вследствие (8) будет

$$I_{k+1} \subset I_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В качестве $x(q)$ вами будет взято такое вещественное число, которое принадлежит $P(I_1, I_2, \ldots)$.

Так определенный элемент $x \in E_Q$ принадлежит $x_n + \overline{U}_n$, каково бы ни было n. Возьмем любую опорную точку q окрестности нуля U_n. По определению элемента x, мы имеем $|x(q) - x_n(q)| \leqslant \varepsilon_n$, откуда следует, что $x - x_n \in \overline{U}_n$, т. е. $x \in x_n + \overline{U}_n$.

Итак, $P(x_1+\bar{U}_1, x_2+\bar{U}_2, \ldots)$ не пусто. Применяя теорему 1, мы видим, что пространство E_Q 2-й категории.

Введем теперь дополнительное предположение. Именно, предположим, что мощность Q не меньше мощности континуума. Тогда пространство E_Q неметрическое.

Именно, докажем, что сходимость в E_Q неустойчива. Согласно предположению относительно Q, можно однозначно отобразить Q на множество сходящихся к нулю последовательностей положительных чисел (мощность такого множества есть мощность континуума, см. ([1]), стр. 228). Это отображение определяет для каждого $q \in Q$ последовательность

$$\xi_1(q), \xi_2(q), \ldots,$$

причем $\xi_n \in E_Q$ и $\xi_n \to 0$.

Пусть a_n — какая-то последовательность положительных чисел с $a_n \to \infty$. Рассмотрим $a_n \xi_n$. Для какого-то $q \in Q$ мы будем иметь $\xi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$, а потому $a_n \xi_n(q) = \sqrt{a_n} \to \infty$.

Итак, последовательность $a_n \xi_n$ неограничена. Ввиду произвольности последовательности a_n мы заключаем, что сходимость в E_Q неустойчива. Значит (см. гл. 4, § 3), пространство E_Q неметрическое.

Таким образом, построен пример локально выпуклого, полного пространства 2-й категории, которое не может быть метризовано. Сходимость в нем неустойчива.

Общая форма линейного функционала $f(x)$ в пространстве E_Q есть

$$f(x) = c_1 x(q_1) + c_2 x(q_2) + \ldots + c_n x(q_n), \tag{9}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — вещественные числа, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — точки множества Q, зависящие от f. Докажем это.

Прежде всего легко видеть, что $f(x)$ вида (9) есть линейный функционал в E_Q. Его аддитивность и однородность очевидны, кроме того,

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(|f(x)| < 1) \supset P\left[\underset{x}{\mathcal{E}}\left(|x(q_1)| < \frac{1}{n|c_1|}\right), \ldots, \underset{x}{\mathcal{E}}\left(|x(q_n)| < \frac{1}{n|c_n|}\right)\right].$$

Но множество, стоящее справа, есть, согласно (6), выпуклая окрестность нуля. Согласно замечанию 1 гл. 3, функционал $f(x)$ линеен.

Пусть теперь, наоборот, $f(x)$ — некоторый линейный функционал в E_Q. Положим

$$x_{q_0}(q) = \begin{cases} 1, & q = q_0, \\ 0, & q \neq q_0 \end{cases} \tag{10}$$

и обозначим

$$\varphi(q) = f(x_q). \tag{11}$$

Функция $\varphi(q)$ может отличаться от нуля лишь в конечном числе точек множества Q. В самом деле, предположим, что существует после-

довательность различных точек $q_1, q_2, \ldots$ такая, что $\varphi(q_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Последовательность $\frac{x_{q_i}}{\varphi(q_i)}$ элементов пространства E_Q стремится к нулю. Вследствие (11) мы имеем

$$f\left(\frac{x_{q_i}}{\varphi(q_i)}\right) = 1,$$

что противоречит непрерывности функционала $f(x)$. Итак, существуют такие точки $q_1, q_2, \ldots, q_n$, в которых $\varphi(q) \neq 0$ в то время, как в остальных точках $\varphi(q) = 0$. Обозначим

$$\varphi(q_1) = c_1, \ \varphi(q_2) = c_2, \ldots, \ \varphi(q_n) = c_n. \tag{12}$$

Обратимся теперь к любому элементу $x \in E$. Рассмотрим множество элементов y пространства E_Q вида

$$y = x(q_1) \cdot x_{q_1} + x(q_2) \cdot x_{q_2} + \ldots + x(q_n) \cdot x_{q_n} + \\ + x(p_1) \cdot x_{p_1} + x(p_2) \cdot x_{p_2} + \ldots + x(p_m) \cdot x_{p_m},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — точки из (12), $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — произвольные точки Q, отличные от q_i, m произвольно, а элементы x_{q_i} и x_{p_i} определены формулой (10).

В любой окрестности элемента x есть точки y. В самом деле, в любой окрестности нуля V содержится окрестность нуля U вида (7). Выбрав точки p_i подходящим образом, мы можем добиться того, что для соответственного элемента y, $y - x \in U$.

Используя непрерывность функционала f, мы теперь убеждаемся, что в любой окрестности числа $f(x)$ заключаются числа $f(y)$. Но все числа $f(y)$ равны между собой и их общее значение есть, согласно (11) и (12),

$$f(y) = x(q_1)\varphi(q_1) + \ldots + x(q_n)\varphi(q_n) = \\ = c_1 x(q_1) + \ldots + c_n x(q_n).$$

Формула (9), таким образом, доказана.

Мы видим, что пространство E_Q может быть реализовано как пространство функций $\varphi(q)$ с вещественными значениями, равных нулю всюду, на Q, за исключением конечного числа точек. Точки множества Q, в которых данная $\varphi(q)$ не равна нулю, будем называть опорными точками $\varphi(q)$. Линейный функционал $f(x)$ может быть, согласно (9) и (12), представлен при помощи своей функции $\varphi(q)$ в виде

$$f(x) = \sum_{q \in Q} x(q)\varphi(q) = x(q_1)\varphi(q_1) + \ldots + x(q_n)\varphi(q_n),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — опорные точки φ.

Опорной точкой множества Γ функций φ мы будем называть всякую точку $q \in Q$, в которой хоть одна функция $\varphi \in \Gamma$ не равна нулю.

Пространство E_Q^*, как сопряженное к пространству E_Q, есть, согласно общей теории, локально выпуклое пространство. Кроме того, E_Q^*

полно как сопряженное к пространству 2-й категории (см. следствие 4 теоремы 6 гл. 3).

Докажем, что сходимость элементов пространства E_Q^* устойчива. Для этого установим конкретный вид этой сходимости.

Предположим, что $f_n \in E_Q^*$, $f_n \to 0$, и рассмотрим последовательность соответствующих $\varphi_n(q)$. Каково бы ни было фиксированное $q \in Q$, мы должны иметь

$$\varphi_n(q) = f_n(x_q) \to 0.$$

Далее, множество опорных точек φ_n должно быть конечно. В самом деле, если оно бесконечно, то существует такая последовательность различных точек множества $Q: q_1, q_2, \ldots$, что, переходя, если нужно, к частичной последовательности φ_n, мы будем иметь $\varphi_n(q_n) \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим последовательность элементов пространства E

$$y_n = \frac{x_{q_n}}{\varphi_n(q_n)}.$$

Эта последовательность ограничена. В самом деле,

$$\sup_n |y_n(q)| = \sup_n \left|\frac{x_{q_n}(q)}{\varphi_n(q_n)}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi_i(q_i)|} & \text{когда } q = q_i, \\ 0 & \text{в остальных точках } Q. \end{cases}$$

Кроме того, по определению $\varphi_n(q)$, выполняется

$$f_n(y_n) = \frac{f_n(x_{q_n})}{\varphi_n(q_n)} = 1,$$

а это противоречит тому, что $f_n \to 0$ (см. определение 1 гл. 4, § 1). Итак, множество опорных точек $\{\varphi_n\}$ конечно.

Пусть теперь, обратно, нам дана $\{\varphi_n\}$ такая, что $\varphi_n(q) \to 0$ в любой точке Q, и множество опорных точек последовательности $\{\varphi_n\}$ конечно. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — это множество. Мы можем написать, каково бы ни было $n = 1, 2, \ldots$ и $x \in E_Q$,

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_n(q_i)\, x(q_i).$$

Возьмем любое ограниченное $G \subset E_Q$. Обозначая $X(q) = \sup_{x \in G} |x(q)|$, получим

$$\sup_{x \in G} |f_n(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\varphi_n(q_i)|\, X(q_i),$$

откуда $\sup_{x \in G} |f_n(x)| \to 0$ и, следовательно, $f_n \to 0$.

Итак, последовательность $f_n \in E_Q^*$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность $\varphi_n(q)$ стремится к нулю в каждой точке Q, и множество опорных точек $\{\varphi_n\}$ конечно.

Предположим, что нам дана последовательность $f_n \in E_Q^*, f_n \to 0$. Согласно только что доказанному, ясно, что существуют положительные числа $a_n \to \infty$ со свойствами $a_n f_n \to 0$. Итак, сходимость в E_Q^* устойчива.

Докажем теперь, что E_Q^* не метризуемо. Для этого вспомним, что каждый элемент x пространства E_Q определяет в E_Q^* линейный функционал $F \in E_Q^{**}$ при помощи равенства

$$F(f) = f(x) \text{ для } f \in E_Q^*.$$

Пусть теперь q_n — произвольная последовательность различных точек множества Q. Рассмотрим последовательность различных точек множества Q. Рассмотрим последовательность $P_n = x_{q_n}$. Каковы бы ни были вещественные числа a_n, $a_n F_n$ сл $\to 0$, потому что $a_n x_{q_n} \to 0$ и, значит, для любого $f \in E_Q^*$

$$a_n F_n(f) = f(a_n x_{q_n}) \to 0.$$

Мы видим, что для пространства E_Q^* выполнены предположения теоремы 2. Значит, пространство E_Q^* 1-й категории. Но оно полно. Следовательно, оно не может быть метрическим.

Таким образом, построен пример пространства локально выпуклого, полного и с устойчивой сходимостью, которое не может быть метризовано. Оно первой категории.

Интересно отметить, что построенные сейчас пространства E_Q и E_Q^* взаимно сопряжены (легко доказать, что $E_Q^{**} = E_Q$).

Примечания к части второй

Глава 3

§ 1. Приведем некоторые конкретные примеры сопряженных топологий.

Пусть CF — пространство функций $x(t)$, непрерывных на всей вещественной оси $(-\infty < t < +\infty)$, метризованное при помощи

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \frac{|x|_n}{1+|x|_n},$$

где $|x|_n = \max\limits_{-n \leqslant t \leqslant n} |x(t)|$.

Это пространство типа (B_0). Сходимость последовательности $x_n \in CF$ означает равномерную сходимость последовательности функций $x_n(t)$ в любом конечном интервале. Общая форма линейного функционала в пространстве CF есть

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации в (a, b) [см. ([21]), стр. 31]. Таким образом, линейное пространство CF^* может быть реализовано пространством функций $g(t)$, каждая из которых определена на всей вещественной оси, постоянна вне некоторого конечного интервала и

непрерывна слева: $g(t)=g(t-0)$. На левом конце интервала изменения $g(t)$ положим: $g(a)=0$.

При этом надо считать $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dg(t)$.

Сопряженная сходимость имеет в этом случае следующий смысл. Последовательность $g_n(t)$ функций из CF^* сходится к $g(t)$, если существует такой конечный интервал (a, b), вне которого все функции $g_n(t)$ постоянны, и если $\operatorname{Var}\limits_{(a,b)}[g_n(t)-g(t)]\to 0$ при $n\to\infty$. Пространство CF^* есть полное локальное выпуклое неметрическое пространство 1-й категории с устойчивой сходимостью.

(cc) топология в CF совпадает с основной топологией.

В качестве второго примера рассмотрим пространство l^p $(0<p<1)$. Общая форма линейного функционала в l^p есть

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i,$$

если $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, причем $\sup\limits_i|\alpha_i|<\infty$.

Таким образом, пространство, сопряженное к l^p, есть пространство m ограниченных числовых последовательностей. Сопряженная топология в этом пространстве будет совпадать с топологией по норме, принятой в m [см. ([2]), стр. 1[1]].

(cc) топология в l^p не совпадает с основной и является нормальной. Это топология l^p, как подпространства пространства l, именно $|x|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|$. (cc) топология слабее основной — факт, возможный только в не локально-выпуклом пространстве.

§ 3. В пространстве CF слабая сходимость последовательности x_n означает сходимость функций $x_n(t)$ в каждой точке и равномерную ограниченность $\{|x_n(t)|\}$ в каждом конечном интервале, если фиксировать этот интервал и придавать n значения 1, 2, ... [ср. ([1]), стр. 134].

Слабая сходимость последовательности $f_n\in CF^*$ как функционалов означает, что соответствующая последовательность $g_n(t)=\text{const}$ вне открытого интервала (a, b), не зависящего от n, причем $\operatorname{Var}\limits_{(a,b)} g_n(t)\leqslant K$ и $g_n(t)$ сходятся по мере на интервале (a, b) и просто сходятся правее его [ср. ([15]), стр. 28, теорема 1].

Таким образом, пространство CF не слабо полно, но пространство CF^* слабо полно. Можно доказать, что вообще, если линейное топологическое пространство E 2-й категории, то E^* слабо полно, если же E с устойчивой сходимостью, то E° слабо полно.

В пространстве l^p $(0<p<1)$ слабая сходимость совпадает с (cc) сходимостью [ср. ([1]), стр. 137]; в пространстве m, сопряженном к l^p, слабая сходимость функционалов $f_n=(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots)$ означает $|f_n|=\sup\limits_i|\alpha_{in}|\leqslant K$

$(n=1,2,\ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_n$ [ср. (1), стр. 129]. Пространство l^p не слабо полно, пространство m, как сопряженное к l^p, слабо полно.

По поводу теоремы 6 гл. 3, § 3, заметим следующее.

Пусть X и Y — линейные топологические пространства. Пусть пространство X 2-й категории. Пусть $L_n(x)$ — последовательность линейных операций из X в Y. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Если* $\{L_n(x)\}$ *ограничена для каждого* $x \in X$, *то для любой окрестности нуля* V *в* Y *можно указать окрестность нуля* U *в* X *такую, что*

$$S[L_1(U),\ L_2(U),\ \ldots] \subset V,$$

где через $L_n(U)$ *обозначен образ множества* U, *даваемый операцией* L_n.

Из этой теоремы следует, что

если $\{L_n(x)\}$ ограничена для каждого $x \in X$, то образ всякого ограниченного множества $G \subset X$, даваемый в пространстве Y последовательностью $\{L_n\}$, ограничен.

Эта теорема является обобщением теоремы 3 Мазура и Орлича из (5).

§ 4. По поводу теоремы 9 гл. 3, § 4 заметим следующее. Пусть попрежнему X и Y — линейные топологические пространства, X — 2-й категории, Y — полно. Пусть $\{L_n\}$ — последовательность линейных операций из X в Y. Тогда

для того, чтобы последовательность $L_n(x)$ в каждой точке сходилась к предельной линейной операции $L(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

A) $\{L_n(x)\}$ была ограничена в каждой точке X,

B) $\{L_n(x)\}$ сходилась в точках везде плотного в X множества.

Эта теорема есть обобщение теоремы 5 Мазура и Орлича из (5).

На локально-выпуклые пространства можно обобщить теорему С. Мазура из (16), стр. 80, доказанную им для нормированного пространства.

Обобщенная теорема Мазура. В локально-выпуклом пространстве E выпуклое замкнутое множество точек всегда слабо замкнуто.

Вехаузен доказал в (4), что всякое нормированное пространство с бесконечным числом измерений — первой категории в смысле своей слабой топологии [(4), стр. 166, 167]. Эта теорема неверна для локально-выпуклых пространств. Так, пространство s последовательностей вещественных чисел есть пространство локально-выпуклое, бесконечномерное типа (F), но слабая топология в нем эквивалентна основной, а потому оно 2-й категории в смысле своей слабой топологии. Однако во всяком случае имеет место

Обобщенная теорема Вехаузена. Если выполнено одно из двух обстоятельств:

(a) E — локально-выпукло, и слабая топология в нем не совпадает с основной,

(b) E — линейное топологическое бесконечномерное пространство и в нем существует конечная выпуклая окрестность нуля; тогда E — 1-й категории в смысле своей слабой топологии.

Пространство CF удовлетворяет условию (a), но не удовлетворяет условию (b). Пространство l^p $(0 \leqslant p < 1)$ удовлетворяет условию (b), но не удовлетворяет условию (a).

Глава 4

§ 3. По поводу теоремы 7 заметим следующее. Пусть X — локально-выпуклое полное пространство с устойчивой сходимостью, а Y — нормированное пространство. Пусть $L_n(x)$ — последовательность секвенциально линейных операций из X в Y. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Если последовательность* $|L_n(x)|$ *ограничена в каждой точке, то, какова бы ни была ограниченная* $\{x_n\} \subset X$, *последовательность* $|L_n(x_n)|$ *ограничена.*

По поводу следствия теоремы 8 вспомним один результат Фихтенгольца из ([13]).

Пусть E есть линейное пространство, лишенное топологии. Пусть F — линейное пространство, элементами которого являются аддитивные и однородные функционалы $f(x)$, определенные на E. Будем называть резольвентной сходимостью семейства F сходимость элементов E, определенную следующим образом:

$x_n \to 0$, если существует последовательность положительных $a_n \to \infty$ таких, что $f(a_n x_n) \to 0$ для любого $f \in F$ [см. ([13]), стр. 209].

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Если пространство E можно нормировать так, чтобы семейство F превратилось в сопряженное пространство, то соответственная сходимость по норме в E будет совпадать с резольвентной сходимостью семейства F* [см. ([13]), стр. 210].

Эту теорему можно усилить следующим образом.

Усиленная теорема Фихтенгольца. Если в пространстве E можно определить выпуклую топологию с устойчивой сходимостью так, чтобы F превратилось в E°, то соответственная сходимость в E будет совпадать с резольвентной сходимостью семейства F.*

Поступило
18 II 1941

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne, Warszava, 1932.
2. J. v. Neumann, On complete topological space, Trans. Am. Math. Soc., 37 (1935), 1—20.
4. J. V. Wehausen, Transformations in linear topological spaces, Duke Math. Journ., 4 (1938), 157—169.
5. S. Mazur and W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math., 4 (1933), 152—157.
12. E. Hausdorff, Gestufte Räume, Fundamenta Math., 25 (1935), 486—505.
13. Gr. Fichtenholz, Sur les fonctionnelles linéaires continues au sens généralisé, Мат. сборник, 48 (1938), 193, 213.
14. A. Tychonoff, Über ein Funktionenraum, Math. Annalen, 111 (1935), 762—766.

* Эта теорема позволяет усилить результаты Г. М. Фихтенгольца из ([13]) и совершенно аналогичные результаты Р. Боса и Дж. Текэя из ([17]).

15. Gr. Fichtenholz, Sur des opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues, Kom. Belg. Acad. Mededeelingen, th. 32 (1936), 26—33.
16. S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math., 4 (1933), 70—84.
17. R. Boas and J. Tukey, A note on linear functionals, Bull. of the Amer. Math. Society, 54 (1938), 523—528.
18. Л. Канторович, О последовательностях линейных операций, ДАН СССР, XXIV (1937), 255—259.
19. E. Čech, On bicompact spaces, Ann. of Math., 38 (1937), 823—844.
20. V. Šmulian, Über lineare topologische Räume, Мат. сб., 49 (1940), 425—444.
21. R. Gateaux, Sur diverses questions du calcul fonctionnel, Bull. Soc. Math. France, 40 (1922), 1—37.

U. SIRVINT. CONVEX SETS AND LINEAR FUNCTIONALS IN ABSTRACT SPACE. PART II. LINEAR FUNCTIONALS

SUMMARY

The second part of the paper is devoted to the investigation of the space of linear functionals defined on a linear topological space. In particular, the «principle of condensation of singularities» for the functionals is proved. Moreover the theorems are obtained which establish the relations between the initial, the «second adjoint» (see below) and the weak topologies. The principal results of this part of the work are published without prooves in C. R. de l'Ac. Sc. de l'URSS, 26, (1940). As to the terminology and notations, we refer the reader to the first part.

Chapter 3

The space of linear functionals

Throughout this chapter E denotes a linear topological space.

§ 1. Adjoint topology

According to a corollary of Wehausen [(4), p. 163] in order that an additive functional $f(x)$ on E be continuous (and hence linear), it is necessary and sufficient that there exists a convex neighbourhood of zero U symmetrical with respect to zero (i. e. $U=-U$) and such that

$$f(x) \leqslant |x/U|$$

on E. This set U will be called the norming sphere of $f(x)$. It is obvious that a linear functional possesses an infinity of norming spheres.

We now consider the linear space E^* of linear functionals defined on E. A convex topology, namely the topology adjoint to that of E, will be defined in E^*. That is realized by means of the reduced family F of open sets (see Chapt. 1) of the form

$$V_G = \underset{f}{\mathfrak{E}} (\text{l. u. b.}\, |f(x)| < 1;\quad x \in G),$$

where G is a bounded subset of the space E. According to Theorem 5 of Chapt. 1, the adjoint topology is convex. The space E^* with the adjoint topology will be called the space adjoint to E.

Applying Corollary 1 of Theorem 5 (Chapt. 1) we see that $f_n \to f$ ($f_n, f \subset E^*$) means that $f_n(x) \to f(x)$ uniformly on each bounded set in E.

Applying Corollary 2 of the same theorem we see that the boundedness of $\Gamma \subset E^*$ means that the image of each bounded set in E given by the set Γ of functionals is bounded.

The space E being a normed space, the adjoint topology coincides with the Banach norm topology of functionals. But the adjoint topology is still a norm topology, when the space E is only locally bounded.

We now take the space E^* as the initial locally convex space and consider the space E^{**} adjoint to E^*. It is easy to see that $E \subset E^{**}$ and thus the topology in E^{**} is defined, in particular, in E. This new topology in E will be called «(cc) topology». If E is a normed space, then the (cc) topology coincides with the initial one. Note that the (cc) topology is necessarily a convex topology if there exists in E a convex neighbourhood of zero, which surrounds zero in a finite manner.

§ 2. Equi-continuity and (cc) topology

A set $\Gamma \subset E^*$ will be called equi-continuous, if there exists a norming sphere common to all $f \in \Gamma$.

THEOREM 1. *An equi-continuous set of functionals is bounded.*

THEOREM 2. *A convex topology is weaker than the corresponding* (cc) *topology.*

THEOREM 3. *The class of bounded sets is a subclass of the class of* (cc) *bounded sets. If, moreover, E is locally convex then these two classes coincide.*

THEOREM 4. *In order that the class of bounded sets in E^* coincide with the class of equi-continuous sets it is necessary and sufficient that the topology in E be stronger than the* (cc)*-topology.*

Under the «completeness» of a space we shall understand the sequential completeness [see ([2]), p. 1].

THEOREM 5. *If the topology in E is stronger than the* (cc) *topology, then E^* is complete.*

§ 3. Weak topologies. The space of the 2d cathegory

We now introduce the usual weak topologies in the spaces E and E^* [see ([4]), p. 166, and ([21]), p. 426]. The weak convergence of elements $x_n \in E$ to $x \in E$ means that $f(x_n) \to f(x)$ for any $f \in E^*$. The weak boundedness of the set $G \subset E$ means that every $f \in E^*$ is bounded on G. On the other hand, the weak convergence of $f_n \in E^*$ to $f \in E^*$ means that $f_n(x) \to f(x)$ for any $x \in E$. The weak boundedness of the set $\Gamma \subset E^*$ means that the values $f(x)$, $x \in E$ being fixed, are bounded.

Applying Theorem 2 (Chapt. 2) one can prove

THEOREM 6. *Let E be of the 2d cathegory. Then every weakly bounded set of linear functional is equi-continuous.* [Cf. ([5]), p. 153].

Corollary 1. *If the space E is of the 2^d cathegory, then the classes of bounded and of equi-continuous sets in E^* coincide.*

Corollary 2. *If the space E is of the 2^d cathegory, then its topology is stronger than the (cc)-topology. If E is locally convex, these two topologies coincide.*

Corollary 3. (*The principle of condensation of singularities*). *If the space E is of the 2^d cathegory, then every weakly bounded set of functionals is bounded* [Cf. (1), p. 80].

Corollary 4. *If the space E is of the 2^d cathegory, then E^* is complete.*

§ 4. The complete space. The space of the 2^d cathegory

THEOREM 7. *If E is locally convex and complete then, every weakly bounded set of functionals is bounded.*

THEOREM 8. *If the topology in E is convex and coincides with the corresponding (cc)-topology, then every weakly bounded set in E is bounded.*

Corollary. *If the space E is locally convex and of the 2^d cathegory, then every weakly bounded set of its elements is bounded.*

THEOREM 9. *Let E be of the 2^d cathegory. The sequence $f_n \in E^*$ converges weakly if and only if*

1) $\{f_n\}$ *is bounded,*

2) $f_n(x)$ *converges on a set of x's everywhere dense in E.*

THEOREM 10. *If E is separable and of the 2^d cathegory, then every bounded set of linear functionals is weakly compact* [Cf. (1), p. 123].

Chapter 4

The space of sequentially linear functionals

The fundamental notion used in this chapter is the convergence of the elements in E.

§ 1. Sequential topology

The convex topology in E generates a certain convergence of points and the latter generates a certain sequential topology in E [see (12)]. A functional $f(x)$ continuous in the sense of sequential topology will be called sequentially continuous. It is easy to see that $f(x)$ is sequentially continuous if and only if $x_n \to x$ implies $f(x_n) \to f(x)$. A functional which is distributive and sequentially continuous will be called sequentially linear. The linear space of all the sequentially linear functionals defined on E will be denoted by E°. Obviously, $E^* \subset E^\circ$.

The adjoint topology and the weak topology of functionals defined above may be easily extended on the whole space E° in such a way that they will be convex topologies in E°. We now can determine again a (cc) topology and a weak topology in E considering E as a subspace of $E^{\circ\circ}$. The (cc) topology and the weak topology of E in the sense of this Chapter are stronger than those of Chapter 3.

§ 2. Equi-continuity and (cc) convergence

It is natural to call a set $\Gamma \subset E^\circ$ equi-continuous if $x_n \to 0$ implies $s(x_n) \to 0$ uniformly on Γ. The class of such sets includes that of Chapt. 3.

THEOREM 1. *An equi-continuous set of functionals is bounded.*

THEOREM 2. *The convergence in E is weaker than the (cc) convergence.*

THEOREM 3. *The classes of bounded and of (cc) bounded sets in E coincide.*

THEOREM 4. *In order that the class of bounded sets of functionals coincide with that of equi-continuous sets it is necessary and sufficient that the convergence in E coincides with the (cc) convergence.*

THEOREM 5. *If the convergence in E coincides with the (cc) convergence then E° is complete.*

§ 3. The stable convergence

The convergence in E is called stable [see ([13]), p. 196] if for every sequence $x_n \to 0$ there exists a sequence of positive numbers a_n tending to ∞ such that $\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded. The convergence in a linear topological metric space is always stable.

THEOREM 6. *If the convergence in E is stable, then every bounded set of functionals is equi-continuous.*

Corollary. *The convergence in E, being stable, coincides with the (cc) convergence.*

THEOREM 7. *If E is complete, then every weakly bounded set in E° is bounded.*

THEOREM 8. *If the convergence in E coincides with the (cc) convergence, then every weakly bounded set in E is bounded.*

Corollary. *If the convergence in E is stable, then every weakly bounded set in E is bounded.*

THEOREM 9. *Let E be complete and the convergence in it be stable. In order that a sequence $f_n \in E^\circ$ weakly converge to some $f \in E^\circ$ it is necessary and sufficient that*

A) *the sequence f_n be bounded,*

B) *the sequence $f_n(x)$ converge to $f(x)$ on the set D sequentially dense in E, i. e. such that the Baire's extension of D is E.*

THEOREM 10. *Let E be complete and the convergence in it be stable. If E is sequentially separable, then every bounded set of sequentially linear functionals is weakly compact.*

Now we may say that the completeness of the space E, together with the stability of convergence in it, imply the same properties of E with respect to E°, as those of E with respect to E^* that are implied by the fact that E is of the 2[d] cathegory.

Examples

THEOREM 1. *Let E be a linear topological space and let $\mathfrak{U}$ be a complete system of neighbourhoods of zero in E. We assume also that for any*

$U_n \in \mathfrak{U}$ and $x_n \in E$ such that $x_{n+1} + U_{n+1} \subset x_n + U_n$ the set $P(x_1 + \bar{U}_1, x_2 + \bar{U}_2, \ldots)$ is not void. Then E is of the 2^d cathegory.

THEOREM 2. *If there exists a sequence of linear functionals $f_n \neq 0$ defined on a linear topological space E such that $a_n f_n$ weakly converges to zero for any sequence of real numbers a_n, then E is of the 1^st cathegory.*

Let Q be an infinite abstract set of elements q. Let us denote by E_Q a linear space of all real function $x(q)$ defined on Q. We topologise E_Q by means of the reduced family of open sets

$$U_q = \mathop{\mathcal{E}}_{x} [\,|x(q)| < 1],$$

where $q \in Q$. Such a reduced family satisfies the conditions of Theorem 5 (Chapt. 1) and therefore our topology in E_Q is convex. By Theorem 6 (Chapt. 1) we see that this topology is equivalent to the Tychonoff's topology [see ([15])], p. 762).

Applying Theorem 1, we see that E_Q is of the 2^d cathegory. If, moreover, the power of Q is not less than $2^{\aleph_0}$ then the convergence in E_Q is not stable. Hence E_Q is not metrizable.

A general form of linear functional in E_Q is

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x(q_i),$$

where $c_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ are the real numbers and $q_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ are points of Q.

We see that the space E^* can be realized as the space of all real functions $\varphi(q)$ defined on Q and vanishing everywhere on Q, except a finite number of points.

According to the general theory developed in Chapt. 3, the space E_Q is locally convex and complete. It may be proved that the convergence in E_Q^* is stable. Further, applying Theorem 2, we can see that E_Q^* is of the 1^{st} cathegory. Hence E_Q^* is not metrizable.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 6 (1942), 227—282 Série mathématique

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

О ГОМОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСОВ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

Для любого замкнутого множества A, лежащего в локально бикомпактном пространстве K, исследуются связи, существующие между гомологическими свойствами A, его дополнения $G = K \setminus A$ и всего пространства K. Полученные весьма точные соотношения (см. гл. I, пункты 11—14), в частности, содержат все известные законы двойственности, а для случая, когда A и K—кривые полиэдры, до конца решают задачу гомологического исследования расположения A в K.

Задача изучения гомологических свойств расположения замкнутого множества A в локально бикомпактном пространстве K в том частном случае, когда K односвязно (т. е. имеет нулевые группы Бетти), полностью решается законом двойственности Александера, Понтрягина и Колмогорова: в этом случае группы Бетти дополнения $G = K \setminus A$ определяются группами Бетти A. Для другого частного случая, когда K — многообразие, а A — кривой полиэдр, интересные результаты типа законов двойственности для чисел Бетти получены в 1927 году Лефшецем (9) и особенно Л. С. Понтрягиным (11).

Теория, составляющая предмет настоящей работы, не только далеко обобщает все упомянутые результаты, но и выясняет впервые самый механизм соотношений между гомологическими свойствами A, G и K при помощи совершенно элементарной конструкции, управляющей всеми этими соотношениями, а именно, конструкции так называемых гомоморфизмов вложения и высечения (п. 11 гл. I).

Комбинаторная основа всей теории дается в гл. I для конечного клеточного комплекса K и его замкнутого подкомплекса A. Полученные закономерности обобщаются в гл. III на случай, когда K есть любое нормальное локально бикомпактное пространство, а A — замкнутое множество, лежащее в K. Это обобщение опирается на апроксимационный процесс, изложенный в гл. II. Глава IV посвящена многообразиям и дает элементарное и по существу комбинаторное доказательство теоремы двойственности Александера — Понтрягина в ее наиболее общем и окончательном виде.

Все основные результаты работы полностью формулированы в п. п. 11—14 (первые четыре пункта главы I). Числовые соотношения, вытекающие из общих теорем, даны в п. 16. Пункт 18 посвящен так называемой теореме Фрагмена — Брауэра.

Нижеследующее введение посвящено сводке обозначений и элементарных фактов: § 1 введения имеет дело с применяемыми в дальнейшем понятиями теории групп и теории характеров, тогда как в § 2 даны необходимые понятия из комбинаторной топологии комплексов. Таким образом работа по существу независима от более ранней литературы, связанной с предметом этого исследования. Немногочисленные ссылки на мою работу «Общая теория гомологии» ([1]) касаются простых лемм и некоторых определений и таковы, что каждая из них может быть прочитана независимо от остального текста только что упомянутой статьи.

Некоторые из результатов настоящей работы были ранее высказаны мною ([2]).

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Группы и характеры

1. Все рассматриваемые в этой работе группы коммутативны и записываются аддитивно; в топологических группах рассматриваются лишь замкнутые подгруппы и непрерывные гомоморфизмы. Дополнительная группа (фактор-группа) группы A по подгруппе B обозначается ввиде $A-B$.

Если при гомоморфном отображении F группы X в группу Y подгруппа X_0 группы X является ядром, а подгруппа Y_1 группы Y — образом группы X, то мы пишем $X_0 = F^{-1}0_Y$, $FX = Y_1$, а также

$$\frac{X \supseteq X_0}{Y \supseteq Y_1}\!\!\downarrow .$$

Через $\mathbf{I}$ обозначается аддитивная группа целых чисел, через $\bar{\mathbf{I}}$ — непрерывная аддитивная группа действительных чисел, приведенных по модулю 1, через $\mathbf{I}_m$ — группа вычетов по модулю m (циклическая группа порядка m).

2. Если A и B двойственны друг другу в смысле Понтрягина ([10]), т. е. каждая группа A и B есть группа характеров другой, то мы пишем

$$A \,|\, B.$$

В этом случае определено произведение

$$ab = a(b) = b(a) \in \bar{\mathbf{I}}$$

для любых двух элементов $a \in A$, $b \in B$ и, следовательно, определено скалярное произведение

$$(xy) = \sum a_i b_i \in \bar{\mathbf{I}} \tag{2.1}$$

для любых двух линейных форм $x = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i t_i$, коэффициенты a_i, b_i которых принадлежат соответственно группам A и B.

Замечание. Если a есть элемент произвольной группы A, а b есть натуральное число, то определяем произведение

$$ab = ba = a + a + a \ldots + a \quad (b \text{ раз}).$$

В соответствии с этим скалярное произведение (2.1) определено, если коэффициенты одной из линейных форм x, y суть элементы произвольной группы A, а коэффициенты второй линейной формы — целые числа. Само собой разумеется, что скалярное произведение (2.1) определено и тогда, когда коэффициенты обеих линейных форм x и y суть элементы некоторого коммутативного кольца.

3. Аннуляторы. Если $X \mid Y$ и подгруппа $A \subseteq X$ есть аннулятор подгруппы $B \subseteq Y$ (т. е. если A состоит из всех элементов $x \in X$, скалярное произведение которых с *любым* элементом $b \in B$ равно нулю), то B, как известно, является аннулятором подгруппы A, и мы пишем

$$X \supseteq A \perp B \subseteq Y. \tag{3.1}$$

Одним из основных предложений теории характеров является:

из (3.1) следует

$$(X - A) \mid B; \quad (Y - B) \mid A \tag{3.2}$$

и обратно.

4. Сопряженные гомоморфизмы. Основная лемма. Пусть

$$X \mid \overline{X}; \quad Y \mid \overline{Y}.$$

Гомоморфизм F группы X в группу Y и гомоморфизм $\overline{F}$ группы $\overline{Y}$ в группу $\overline{X}$ называются сопряженными, если для любых $x \in X$, $\overline{y} \in \overline{Y}$

$$(Fx \cdot \overline{y}) = (x \cdot \overline{F}\overline{y})$$

(мы здесь и в дальнейшем часто пишем Fx вместо $F(x)$). Сопряженность гомоморфизмов F и $\overline{F}$ мы передаем записью

$$F \left| \begin{array}{cc} X & \overline{X}\uparrow \\ \downarrow Y & \overline{Y} \end{array} \right| \overline{F}$$

или, если даны образы $Y_1 = FX$, $\overline{X}_1 = \overline{F}\overline{Y}$ и ядра $X_0 = F^{-1} 0_Y$ и $\overline{Y}_0 = \overline{F}^{-1} 0_X$,

$$F \left| \begin{array}{cc} X \supseteq X_0 & \overline{X}_1 \subseteq \overline{X} \\ \downarrow & \uparrow \\ Y \supseteq Y_1 & \overline{Y}_0 \subseteq \overline{Y} \end{array} \right| \overline{F}. \tag{4.1}$$

Вся эта работа в значительной степени опирается на следующую лемму:

Основная лемма [4]. *Из* (4.1) *следует*

$$F \left| \begin{array}{c} X \supseteq X_0 \perp \overline{X}_1 \subseteq \overline{X} \\ \downarrow \diagup \uparrow \\ Y \supseteq Y_1 \perp \overline{Y}_0 \subseteq \overline{Y} \end{array} \right| \overline{F} \tag{4.2}$$

(где диагональная черта означает двойственность $\overline{X}_1 \mid Y_1$*) и*

$$\begin{gathered} X_0 \mid (\overline{X} - \overline{X}_1) \\ (Y - Y_1) \mid \overline{Y}_0 . \end{gathered} \tag{4.3}$$

Доказательство. Двойственности (4.3) следуют непосредственно из теоремы 3 и из аннуляций (4.2). Двойственность $\overline{X}_1 \mid Y_1$ следует

из теоремы 3 и из изоморфизма $Y_1 \approx (X - X_0)$. Достаточно доказать аннуляции (4.2) и притом первую из этих аннуляций.

Пусть $x \in X_0$, $\bar{y} \in \bar{Y}$. Имеем $(x \cdot F\bar{y}) = (Fx \cdot y) = 0$. С другой стороны, если $Fx \neq 0$, то существует $\bar{y} \in \bar{Y}$ такое, что $(x \cdot F\bar{y}) = (Fx \cdot \bar{y}) \neq 0$, что и требовалось доказать.

5. Случай тела рациональных чисел $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{R}^n$ линейное рациональное n-мерное пространство, т. е. группу всех линейных форм от n переменных с рациональными коэффициентами и рациональными числами в качестве операторов. Лишь линейные подпространства являются при этом допустимыми подгруппами. Под характером пространства $\mathfrak{R}^n$ понимаем, в отличие от нашей обычной терминологии, гомоморфное отображение в $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{R}^n$ двойственно самому себе в силу

$$x(y) = y(x) = x \cdot y \in \mathfrak{R},$$

где для $x \in \mathfrak{R}^n$, $y \in \mathfrak{R}^n$ скалярное произведение взято в самом элементарном смысле слова. В этом случае двойственности переходят в изоморфизмы, и лемма [4], оставаясь верной, делается тривиальной.

§ 2. Элементарные замечания о клеточных комплексах

6. Клеточные пространства и их подпространства. Клеточным пространством [Tucker ([14]), Колмогоров ([8])] называется конечное множество элементов («клеток»), удовлетворяющее следующим трем условиям:

1°. каждой клетке поставлено в соответствие неотрицательное целое число — размерность клетки (обозначаемая верхним индексом);

2°. каждой клетке t^r соответствует единственная клетка $-t^r$, называемая клеткой, противоположной клетке t^r, и имеющая ту же размерность r что и t^r. При этом $-(-t^r) = t^r$.

3°. каждым двум клеткам t_i^r и t_j^{r-1} (размерностей r и $r-1$) соответствует целое число $(t_i^r : t_j^{r-1})$, называемое коэффициентом инцидентности этих клеток и удовлетворяющее равенствам

$$(-t_i^r : t_j^{r-1}) = (t_i^r : -t_j^{r-1}) = -(t_i^r : t_j^{r-1}).$$

Пусть t^r и t^s — элементы клеточного пространства K, причем $r > s$. Мы пишем $t^r > t^s$ (или $t^s < t^r$) и называем клетку t^s гранью клетки t^r, если существуют такие элементы $t_1^{r-1}, \ldots, t_{r-s-1}^{s+1}$ пространства K, что

$$(t^r : t_1^{r-1}) \neq 0, \quad (t_1^{r-1} : t_2^{r-2}) \neq 0, \ \ldots, \ (t_{r-s-1}^{s+1} : t^s) \neq 0.$$

Клеточное пространство Q называется подпространством клеточного пространства K, если все элементы Q суть элементы K и если, кроме того, размерность, отношение противоположности и коэффициенты инцидентности элементов Q в Q те же, что и в K.

Подпространство Q клеточного пространства K называется замкнутым, если из $t \in Q$, $t' < t$ (в K) следует $t' \in Q$; открытым, если из $t \in Q$, $t' > t$ (в K) следует $t' \in Q$.

7. Цепи и границы. В каждой паре взаимно противоположных клеток одну клетку раз навсегда обозначим через t_i^r, тогда другая обозначится через $-t_i^r$. Положим $\varepsilon_{ij}^r = (t_i^r : t_j^{r-1})$.

Определение [7.1] Пусть K — клеточное пространство, $\mathfrak{A}$ — группа; r-мерной цепью пространства K по области коэффициентов $\mathfrak{A}$ называется функция x^r со значениями из $\mathfrak{A}$, определенная на множестве всех r-мерных клеток K и принимающая на противоположных клетках противоположные значения:

$$x^r(-t^r) = -x^r(t_i^r).$$

Цепи по области коэффициентов $\mathbf{I}$ называются целочисленными цепями.

Аддитивная группа всех r-мерных цепей K по $\mathfrak{A}$ обозначается через $L_K^r \mathfrak{A})$, иногда просто через L_K^r или даже через L^r. Если $\mathfrak{A} = \mathbf{I}_m$ есть циклическая группа порядка m, то вместо $L_K^r(\mathfrak{A})$ пишем $L_K^r(m)$, и элементы группы $L_K^r(m)$ называем «цепями по модулю m».

Нулевой элемент группы $L_K^r(\mathfrak{A})$ обозначим через 0_k^r.

Цепь, принимающую на t_i^r значение $a \in \mathfrak{A}$, и на всех r-мерных клетках, отличных от $\pm t_i^r$, принимающую значение 0, обозначим через at_i^r; в частности, целочисленную цепь, принимающую на t_i^r значение 1 (на $-t_i^r$ значение -1) и равную нулю на всех клетках $\neq \pm t_i^r$, отождествляем с клеткой t_i^r. Это соглашение позволяет записать всякую r-мерную цепь x^r в виде линейной формы

$$x^r = \sum a_i t_i^r,$$

где a_i есть значение, принимаемое цепью x^r на клетках t_i^r.

Поэтому в случаях, указанных в п. 2, можно говорить о скалярном произведении $(x^r \cdot y^r) = \sum a_i b_i$ двух цепей $x^r = \sum a_i t_i^r$ и $y^r = \sum b_i t_i^r$.

В частности, скалярное произведение $(x^r \cdot t_i^r)$ определено для любой цепи x^r и равно значению этой цепи на клетке t_i^r.

Определение [7.2]. Пусть x^r — произвольная r-мерная цепь клеточного пространства K. Тогда $(r-1)$-мерная цепь, принимающая на каждом t_j^{r-1} значение $\sum\limits_i \varepsilon_{ij}^r (x^r \cdot t_i^r)$, обозначается через Δx^r и называется Δ-границей (или просто границей) цепи x^r в пространстве K; $(r+1)$-мерная цепь, принимающая на каждом t_h^{r+1} значение $\sum\limits_i \varepsilon_{hi}^{r+1} (x^r \cdot t_i^r)$, обозначается через ∇x^r и называется ∇-границей (или верхней границей) цепи x^r в K.

Заметим, что

$$(\Delta t_h^{r+1} \cdot t_i^r) = (\nabla t_i^r \cdot t_h^{r+1}) = \varepsilon_{hi}^{r+1},$$

откуда следует, что для любых двух цепей x^r и y^{r+1} имеем

$$(x^r \cdot \Delta y^{r+1}) = (\nabla x^r \cdot y^{r+1}). \tag{7.3}$$

Пусть теперь $\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{A}}$, $L_K^r = L_K^r(\mathfrak{A})$, $\overline{L}_K^r = \overline{L}_K^r(\overline{\mathfrak{A}})$. Введем обозначения для образов групп и для ядер гомоморфизмов Δ и ∇

$$Z_K^r = \nabla^{-1} 0_K^{r+1}, \quad \overline{Z}_K^r = \Delta^{-1} 0_K^{r-1}; \quad H_K^r = \nabla L_K^{r-1}, \quad \overline{H}_K^r = \Delta \overline{L}_K^{r+1}.$$

Элементы группы Z_K^r (т. е. цепи x^r, удовлетворяющие условию $\nabla x^r = 0$) называются r-мерными ∇-циклами; элементы группы $\overline{Z}_K^r$ (т. е. цепи, удовлетворяющие условию $\Delta x^r = 0$) называются r-мерными Δ-циклами. Из (7.3) и основной леммы 4 следует

$$(7.4) \qquad \nabla \left| \begin{array}{ccc} L_K^{r-1} \supseteq Z_K^{r-1} & \perp & \overline{H}_K^{r-1} \subseteq \overline{L}_K^{r-1} \\ \downarrow & \diagup & \uparrow \\ L_K^r \supseteq H_K^r & \perp & \overline{Z}_K^r \subseteq \overline{L}_K^r \end{array} \right| \Delta,$$

$$(7.5) \qquad (L_K^r - H_K^r) \mid \overline{Z}_K^r.$$

8. Клеточные комплексы. Клеточное пространство K **называется** клеточным комплексом, если для любого $t_i^r \in K$ имеем $\Delta\Delta t_i^r = 0$, т. е. $\sum_j \varepsilon_{ij}^r \varepsilon_{jh}^{r-1} = 0$ для любых r, i, h. Для всякой цепи x^r клеточного комплекса имеем $\Delta\Delta x^r = \nabla\nabla x^r = 0$, т. е. Δ- и ∇-граница всякой цепи есть цикл и, значит, $\overline{H}_K^r \subseteq \overline{Z}_K^r$, $H_K^r \subseteq Z_K^r$.

Элементы групп $\overline{H}_K^r$ и H_K^r называются ограничивающими циклами (или циклами, гомологичными нулю) в K (соответственно Δ— и ∇—).

9. Группы Бетти. Группы

$$\Delta_K^r = \Delta_K^r(\overline{\mathfrak{A}}) = \overline{Z}_K^r - \overline{H}_K^r; \quad \nabla_K^r = \nabla_K^r(\mathfrak{A}) = Z_K^r - H_K^r$$

называются r-мерными Δ- и ∇-группами, а вместе — группами Бетти клеточного комплекса K по данной области коэффициентов $\mathfrak{A}$. Элементы групп Δ_K^r и ∇_K^r называются соответственно r-мерными Δ- и ∇-классами комплекса K; циклы, входящие в один и тот же класс, называются гомологичными между собой. Знак гомологии: $\sim$ [если циклы z_1^r и z_2^r гомологичны между собою, то пишем $z_1^r \sim z_2^r$; в частности запись $z^r \sim 0$ означает, что z^r ограничивает (в K)].

Докажем:

$$(9.1) \qquad \nabla_K^r(\mathfrak{A}) \mid \Delta_K^r(\overline{\mathfrak{A}}).$$

Для этого вспомним из теории характеров теорему: *Если* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C} \mid \overline{\mathfrak{C}}$, *то* $(\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{A}} - \overline{\mathfrak{C}})$; применим ее к изоморфизму

$$(L_K^r - H_K^r) - (Z_K^r - H_K^r) \approx L_K^r - Z_K^r.$$

Подставляя из (7.5), (7.4) отношения $(L_K^r - H_K^r) \mid \overline{Z}_K^r$, $L_K^r - Z_K^r \approx \approx H_K^{r+1} \mid \overline{H}_K^r$, получим двойственность $(Z_K^r - H_K^r) \mid (\overline{Z}_K^r - \overline{H}_K^r)$, что и требовалось доказать.

10. Замкнутые и открытые подкомплексы. Пусть Q — замкнутое подпространство клеточного комплекса K и $t^r \in Q$. Рассматривая t^r как целочисленную цепь каждого из клеточных пространств K и Q и ука-

зывая нижним индексом, где именно берется граница, имеем $\Delta_Q t^r = \Delta_K t^r$ и, следовательно, $\Delta_Q \Delta_Q t^r = 0$. Итак, Q есть клеточный *комплекс*.

Пусть теперь Q — открытое подпространство клеточного комплекса K. Пусть $x^r_Q \in L^r_Q$; цепь x^r_K («тривиальное продолжение цепи x^r_Q на комплекс K») определяем, полагая $x^r_K = x^r_Q$ на Q и $x^r_K = 0$ на $K \setminus Q$.

Для любой клетки $t^{r-1} \in Q$ имеем

$$(\Delta_Q x^r_Q \cdot t^{r-1}) = (\Delta_K x^r_K \cdot t^{r-1}),$$

и, значит, $(\Delta_Q \Delta_Q x^r_Q \cdot t^{r-2}) = (\Delta_K \Delta_K x^r_K \cdot t^{r-2}) = 0$ для любого $t^{r-2} \in Q$, так что Q — снова клеточный комплекс. Итак:

[10] *Как замкнутые, так и открытые подпространства клеточного комплекса являются клеточными комплексами.*

ГЛАВА I. КОМПЛЕКСЫ

§ 3. Основная теория

11. Гомоморфизмы вложения и высечения. Пусть Q — клеточный подкомплекс клеточного комплекса K, и x^r_Q — цепь комплекса Q. Всякая цепь комплекса K, принимающая на Q те же значения, что и x^r_Q, называется продолжением цепи x^r_Q (на весь комплекс K); среди этих продолжений имеется тривиальное продолжение, обозначаемое через $E^Q_K x^r_Q$, принимающее на $K \setminus Q$ значение нуль. Ставя в соответствие каждой цепи x^r_Q ее тривиальное продолжение $E^Q_K x^r_Q$, получим изоморфное отображение E^Q_K группы L^r_Q в группу L^r_K.

Замечание. В случаях, когда невозможны недоразумения, мы будем отождествлять цепь x^r_Q с ее тривиальным продолжением и, следовательно, считать изоморфизм E^Q_K тождественным изоморфизмом группы L^r_Q в группу L^r_K.

Пусть теперь x^r_K — какая-нибудь цепь комплекса K. Обозначим через $I^K_Q x^r_K$ цепь комплекса Q, принимающую на Q те же значения, что и цепь x^r_K. Ставя в соответствие каждой цепи x^r_K цепь $J^K_Q x^r_K$, получим гомоморфное отображение I^K_Q группы L^r_K на группу L^r_Q.

Изоморфизм E^Q_K называется изоморфизмом вложения, гомоморфизм I^K_Q — гомоморфизмом высечения.

Если $\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{A}}$, то, очевидно,

$$I^K_Q \downarrow \begin{array}{cc} L^r_K(\mathfrak{A}) & L^r_K(\overline{\mathfrak{A}}) \\ L^r_Q(\mathfrak{A}) & L^r_Q(\mathfrak{A}) \end{array} \uparrow E^Q_K. \qquad (11.1)$$

Пусть теперь K есть раз навсегда определенный клеточный комплекс, A — определенный замкнутый подкомплекс комплекса K, и $G = K \setminus A$ — открытый подкомплекс, дополнительный к A.

Легко видеть, что для любых цепей $x^r_A \in L^r_A$, $x_G \in L^r_G$ имеем

$$\Delta E^A_K x^r_A = E^A_K \Delta_A x^r_A; \qquad \nabla E^G_K x^r_G = E^G_K \nabla_G x^r_G, \qquad (11.2)$$

а для любой цепи $x^r_K \in L^r_K$

(11.3) $$\nabla_A I^K_A x^r_K = I^K_A \nabla_K x^r_A; \quad \Delta_G I^K_G x^r_K = I^K_G \Delta_K x^r_G.$$

Поэтому

[11.4] Изоморфизм вложения отображает (тождественно)

Δ-циклы комплекса A; ∇-циклы комплекса G

на

Δ-циклы комплекса K; ∇-циклы комплекса K,

причем ограничивающие циклы отображаются на ограничивающие циклы.

Отсюда следует, что *изоморфизм вложения порождает гомоморфизмы, называемые гомоморфизмами вложения*, а именно: *гомоморфизм E^A_K группы Δ^r_A в группу Δ^r_K и гомоморфизм E^G_K группы ∇^r_G в группу ∇^r_K.*

[11.5] *Гомоморфизм высечения порождает гомоморфизм того же наименования*, а именно: *гомоморфизм I^K_A группы ∇^r_K в группу ∇^r_A и гомоморфизм I^K_G группы Δ^r_K в группу Δ^r_G.*

12. Группы фигуры K, A, G. Определяем: группы Δ^r_{KA}, ∇^r_{KG} суть образы групп Δ^r_A, ∇^r_G, при гомоморфизмах E^A_K и E^G_K, группы $\Delta^r_{A:K}$, $\nabla^r_{G:K}$ суть ядра этих гомоморфизмов, группы ∇^r_{AK}, Δ^r_{GK} суть образы групп ∇^r_K, Δ^r_K при гомоморфизмах I^K_A и I^K_G; формулами эти определения записываются так:

(12.1) $$\Delta^r_{KA} = E^A_K \Delta^r_A \subseteq \Delta^r_K; \quad \nabla^r_{KG} = E^G_K \nabla^r_G \subseteq \nabla^r_K;$$

(12.2) $$\Delta^r_{A:K} = (E^A_K)^{-1}\, 0_K \subseteq \Delta^r_A; \quad \nabla^r_{G:K} = (E^G_K)^{-1}\, 0_K \subseteq \nabla^r_G;$$

(12.3) $$\nabla^r_{AK} = I^K_A \nabla^r_K \subseteq \nabla^r_A; \quad \Delta^r_{GK} = I^K_Q \Delta^r_K \subseteq \Delta^r_G.$$

Доказываем:

[12.4] Ядрами гомоморфизмов I^K_A, I^K_G являются группы ∇^r_{KG}, Δ^r_{KA}:

(12.4) $$(I^K_A)^{-1}\, 0_A = \nabla^r_{KG}; \quad (I^K_G)^{-1}\, 0_G = \Delta^r_{KA}.$$

Достаточно доказать левое равенство в (12.4). Для краткости пишем I вместо I^K_A и E вместо E^A_K.

1°. Если $z^r \in Z^r_K$, $z^r = z^r_G + h^r$ при $z^r_G \in Z^r_G$, $h^r \in H^r_K$, то
$$Iz^r = Iz^r_G + Ih^r = Ih^r \in H^r_A.$$

2°. Если $z^r \in Z^r_K$, $Iz^r \in H^r_A$, то $z^r = z^r_G + h^r$, при
$$z^r_G \in Z^r_G, \quad h^r \in H^r_K.$$

Докажем 2°. Имеем $Iz^r = \nabla x^{r-1}_A$, $x^{r-1}_A \in L^{r-1}_A$; для любого $t^r_A \in A$
$$[(z^r - \nabla E x^{r-1}_A) \cdot t^r_A] = (z^r \cdot t^r_A) - (\nabla E x^{r-1}_A \cdot t^r_A),$$
$$(z^r \cdot t^r_A) = (Iz^r \cdot t^r_A) = (\nabla x^{r-1}_A \cdot t^r_A),$$
$$(\nabla E x^{r-1}_A \cdot t^r_A) = (I \nabla E x^{r-1}_A \cdot t^r_A) = (\nabla I E x^{r-1}_A \cdot t^r_A) = (\nabla x^{r-1}_A \cdot t^r_A),$$

так что $[(z^r - \nabla E x^{r-1}_A) \cdot t^r_A] = 0$ для любого $t^r_A \in A$ и ∇-цикл $z^r - \nabla E x^{r-1}_A$ есть цикл комплекса G. Так как $\nabla E x_A$ ограничивает на K, утверждение 2° и, следовательно, вся формула (12.4) доказана.

Группы Δ^r_{KA}, ∇^r_{KG}; $\Delta^r_{A:K}$, $\nabla^r_{G:K}$; ∇^r_{AK}, Δ^r_{GK} (а также группы $\nabla^r_{A:K} = \nabla^r_A - \nabla^r_{AK}$ и $\Delta^r_{G:K} = \Delta^r_G - \Delta_{GK}$, целесообразность введения которых выяснится в п. 14, называются группами фигуры K, A, G.

13. Геометрический смысл групп фигуры K, A, G. [13.1]. Подгруппа $\Delta^r_{KA} \subseteq \Delta^r_K$ имеет своими элементами те Δ-классы (те ∇-классы) комплекса K, которые содержат Δ-циклы комплекса A (соответственно ∇-циклы комплекса G).

[13.2] Рассмотрим Δ-классы $\mathfrak{z}^r_A \in \Delta^r_A$ (соответственно ∇-классы $\mathfrak{z}^r_G \in \nabla^r_G$), состоящие из циклов, ограничивающих на K. Эти классы являются элементами группы $\Delta^r_{A:K}$ (группы $\nabla^r_{G:K}$).

[13.3] Назовем ∇-цикл комплекса A (соответственно Δ-цикл комплекса G) продолжаемым на весь комплекс K, если среди его продолжений на K имеются ∇-циклы (Δ-циклы) комплекса K. Группа ∇^r_{AK} (группа Δ^r_{GK}) есть фактор-группа группы всех продолжаемых r-мерных ∇-циклов комплекса A (соответственно Δ-циклов комплекса G) по подгруппе всех циклов, ограничивающих на A (на G).

14. Результаты. Из определения групп $\Delta^r_{A:K}$, Δ^r_{KA}; $\nabla^r_{G:K}$, ∇^r_{KG} и из (11.1), (12.4) следует в силу основной леммы [4]:

$$
(14.1)\qquad
\begin{array}{c|ccc|c}
E^A_K & \Delta^r_A \supseteq \Delta^r_{A:K} & \perp & \nabla^r_{AK} \subseteq \nabla^r_A & I^K_A \\
 & \downarrow & \nearrow & \uparrow & \\
 & \Delta^r_K \supseteq \Delta^r_{KA} & \perp & \nabla^r_{KG} \subseteq \nabla^r_K & \\
I^K_G & \downarrow & \nearrow & \uparrow & E^G_K \\
 & \Delta^r_G \supseteq \Delta^r_{GK} & \perp & \nabla^r_{G:K} \subseteq \nabla^r_G &
\end{array},
$$

$$
(14.2)\qquad \Delta^r_{A:K} \mid (\nabla^r_A - \nabla^r_{AK}); \qquad \nabla^r_{G:K} \mid (\Delta^r_G - \Delta^r_{GK}).
$$

Таблица (14.1) содержит:

1°. Две пары изоморфизмов:
первая пара

$$\Delta^r_A - \Delta^r_{A:K} \approx \Delta^r_{KA}; \qquad \nabla^r_G - \nabla^r_{G:K} \approx \nabla^r_{KG};$$

вторая пара

$$\Delta^r_K - \Delta^r_{KA} \approx \Delta^r_{GK}; \qquad \nabla^r_K - \nabla^r_{KG} \approx \nabla^r_{AK}.$$

2°. Пару двойственностей:

$$\Delta^r_{KA} \mid \nabla^r_{AK}; \qquad \nabla^r_{KG} \mid \Delta^r_{GK}.$$

3°. Три аннуляции: центральную аннуляцию

$$\Delta^r_K \supseteq \Delta^r_{KA} \perp \nabla^r_{KG} \subseteq \nabla^r_K$$

и пару аннуляций

$$\Delta^r_A \supseteq \Delta^r_{A:K} \perp \nabla^r_{AK} \subseteq \nabla^r_A; \qquad \nabla^r_G \supseteq \nabla^r_{G:K} \perp \Delta^r_{GK} \subseteq \Delta^r_G.$$

В каждой паре отношений (изоморфизмов, двойственностей, аннуляций) одно отношение получается из другого подстановкой $\begin{pmatrix} \Delta & A \\ \nabla & G \end{pmatrix}$.

Первая пара изоморфизмов представляет собою тривиальность, так как непосредственно содержится в определениях участвующих в ней групп.

Двойственности в (14.1), (14.2) являются алгебраическими следствиями аннуляций (14.1), которые, в свою очередь, вытекают из сопряженности гомоморфизмов вложения и высечения.

Центральная аннуляция очевидно может быть сформулирована и так:

Теорема о «снятии цикла»*. *Для того, чтобы r-мерный ∇-цикл (Δ-цикл) комплекса K был гомологичен в K Δ-циклу комплекса G (Δ-циклу комплекса A), необходимо и достаточно, чтобы его скалярное произведение со всяким r-мерным Δ-циклом комплекса A (∇-циклом комплекса G) равнялось нулю.*

Кроме доказанных соотношений (14.1), (14.2), имеем еще предложение:

Основная теорема двойственности

(14.3) $$\Delta^r_{A:K} \mid \nabla^{r+1}_{G:K}.$$

В этой теореме можно двойственность заменить изоморфизмами помощью *определений*:

$$\nabla^r_{A:K} = \nabla^r_A - \nabla^r_{AK}; \quad \Delta^r_{G:K} = \Delta^r_G - \Delta^r_{GK}.$$

Тогда двойственности (14.2) переходят в

(14.2′) $$\Delta^r_{A:K} \mid \nabla^r_{A:K}; \quad \nabla^r_{G:K} \mid \Delta^r_{G:K},$$

а двойственность (14.3) переходит в пару изоморфизмов:

третья пара изоморфизмов

(14.3′) $$\Delta^r_{A:K} \approx \Delta^{r+1}_{G:K}; \quad \nabla^r_{A:K} \approx \nabla^{r+1}_{G:K}.$$

Замечание. Как легко видеть, *группа* $\nabla^r_{A:K}$ (группа $\Delta^r_{G:K}$) *может быть определена как фактор-группа группы всех r-мерных ∇-циклов комплекса A* (соответственно Δ-циклов комплекса G) *по подгруппе продолжаемых циклов* (см. [13.3]).

Из (14.1) и (14.3) следует, что *все группы фигуры K, A, G определяются, например, группами Δ^r_K, Δ^r_A, Δ^r_{KA}, взятыми для всех r.*

В главах II и III *все вышеизложенные определения и результаты будут перенесены на случай, когда K есть любое нормальное локально бикомпактное пространство, A — замкнутое множество в K и $G = K \setminus A$.* В частности, *если K односвязно в размерности r* (т. е. $\Delta^r_K = 0$, значит и $\nabla^r_K = 0$), то очевидно $\Delta^r_{A:K} = \Delta^r_A$, $\nabla^r_{G:K} = \nabla^r_G$. Поэтому *если K односвязно в размерностях r и $r+1$*, то (14.3′) переходит в *закон двойственности Александера-Колмогорова*:

$$\Delta^r_A \approx \Delta^{r+1}_G, \quad \nabla^r_A \approx \nabla^{r+1}_G.$$

---

* Эта теорема впервые сформулирована Л. С. Понтрягиным, который (так же, как и Л. А. Люстерник) неоднократно обращал мое внимание на важность ее доказательства в возможно более общих предположениях.

Но вернемся к случаю, когда K — комплекс, и возьмем за область коэффициентов группу I_m. Из изоморфизма $\Delta^r_A - \Delta^r_{A:K} \approx \Delta^r_{KA}$ заключаем, что порядок группы $\Delta^r_A(m)$ равен произведению порядков групп $\Delta^r_{A:K}(m)$ и $\Delta^r_{KA}(m)$, и, значит, определен последними двумя группами. По одной теореме М. Ф. Бокштейна ([6]) все группы Бетти любого комплекса вполне определены порядками групп $\Delta^r(m)$ этого комплекса. Значит, группы Δ^r_A вполне определены группами $\Delta^r_{KA}(m)$ и $\Delta^r_{A:K}(m)$, взятыми для всех r и m. Аналогичный результат имеет место для групп ∇^r_G, тогда как группы Δ^r_K определены группами Δ^r_{KA} и Δ^r_{GK}.

Итак,

[14.4] *Если K — клеточный комплекс, A замкнутый подкомплекс комплекса K и $G = K \setminus A$, то группы Δ^r_A и Δ^r_G для всех размерностей r и всех областей коэффициентов вполне определены группами Δ^r_K, $\Delta^r_{KA}(m)$ и $\Delta^r_{A:K}(m)$, взятыми также для всех размерностей r и всех целых $m \geqslant 2$; группы Δ^r_K определены группами Δ^r_{KA} и ∇^r_{KG}, взятыми для всех r и $m \geqslant 2$.*

В гл. III, п. 38, мы покажем, что *теорема* [14.4] *остается в силе, если под K и $A \subseteq K$ понимать любые кривые полиэдры* (топологические образы конечных эвклидовых полиэдров [см. ([4]), стр. 128]. Таким образом для кривых полиэдров задача изучения гомологических свойств расположения может считаться вполне решенной.

Теорема [14.4] едва ли обобщается на случай, когда K — произвольный компакт; построение соответствующих примеров и дальнейшее исследование гомологических свойств расположения замкнутых множеств $A \subseteq K$ в этом случае представляется важной и интересной задачей.

15. Оператор ∇E^A_K и доказательство третьей пары изоморфизмов. Вновь пишем E вместо E^A_K. Каждому ∇-циклу z^r_A комплекса A соответствует ∇-цикл $\nabla E z^r_A$, который по самому своему определению ограничивает в K.

Докажем: *Если z^r_A — продолжаемый цикл, то $\nabla E z^r_A$ ограничивает в G.* В самом деле, пусть $z^r_A = I^K_A z^r_K$, где $z^r_K \in Z^r_K$.

Тогда

$$z^r_K = E z^r_A + I^K_G z^r_K,$$
$$0 = \nabla z^r_K = \nabla E z^r_A + \nabla I^K_G z^r_K,$$
$$\nabla E z^r_A = -\nabla I^K_G z^r_K.$$

Так как $I^K_G z$ есть цепь комплекса G, наше утверждение доказано. Итак, *оператор ∇E порождает гомоморфизм* (*того же наименования*) *группы $\nabla^r_{A:K}$ в группу $\nabla^{r+1}_{G:K}$*. Докажем, что этот гомоморфизм есть изоморфное отображение группы $\nabla^r_{A:K}$ на группу $\nabla^{r+1}_{G:K}$.

Для доказательства того, что ∇E отображает $\nabla^r_{A:K}$ на $\nabla^{r+1}_{G:K}$, возьмем $z^{r+1}_G \in \mathfrak{z}^{r+1}_G \in \nabla^{r+1}_{G:K}$. Мы должны найти такой ∇-цикл z^r_A комплекса A, что $z^{r+1}_G - \nabla E z^r_A$ ограничивает на G. По определению z^{r+1}_G, существует

цепь x^r_K комплекса K, ограниченная циклом z^{r+1}_G; следовательно

$$\nabla_A I^K_A x^r_K = I^K_A \nabla x^r_K = I^K_A z^{r+1}_G = 0,$$

так что цепь $z^r_A = I^K_A x^r_K$ есть ∇-цикл комплекса A, а $x^r_G = x^r_K - EI^K_A x^r_K$ есть цепь комплекса G, для которой

(15.1) $$\nabla x^r_G = \nabla x^r_K - \nabla EI^K_A x^r = z^{r+1}_G - \nabla Ez^r_A.$$

Остается доказать, что гомоморфное отображение ∇E группы $\nabla^r_{A:K}$ на $\nabla^{r+1}_{G:K}$ представляет собою изоморфизм. Для этого достаточно доказать: если для некоторого $z^r_A \in \mathfrak{z}^r_A \in \nabla^r_{A:K}$ цикл ∇Ez^r_A ограничивает на G, то существует такой ∇-цикл z^r_K комплекса K, что $z^r_A = I^K_A z^r_K$.

По предположению,

$$\nabla Ez^r_A = \nabla x^r_G, \quad \text{где} \quad x^r_G \in L^r_G.$$

Поэтому $\nabla(Ez^r_A - x^r_G) = 0$, т. е. $z^r_K = Ez^r_A - x^r_G$ есть ∇-цикл на K, и

$$I^K_A z^r_K = I^K_A Ez^r_A - I^K_A x^r_G = z^r_A,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Подобным же образом каждому Δ-циклу z^{r+1}_G комплекса G соответствует Δ-цикл $\Delta E^G_K z^{r+1}_G$ комплекса A, ограничивающий на K, и оператор ΔE^G_K порождает изоморфизм группы $\Delta^{r+1}_{G:K}$ на группу $\Delta^r_{A:K}$.

§ 4. Следствия и дополнения

16. Числовые соотношения. Возьмем за область коэффициентов или какое-нибудь из тел $\mathbf{I}_m$ при простом m, или тело рациональных чисел $\mathfrak{R}$. В последнем случае вступают в силу соглашения, сделанные в п. 5. Через ρ мы обозначаем ранги различных групп линейных форм с коэффициентами из только что упомянутых алгебраических тел. Заметим, наконец, что при наших предположениях все двойственности п. 14 превращаются в изоморфизмы. Полагаем:

$$\pi^r_K = \rho\Delta^r_K = \rho\nabla^r_K \qquad \text{(числа Бетти)},$$
$$\pi^r_{KA} = \rho\Delta^r_{KA} = \rho\nabla^r_{AK}; \qquad \pi^r_{KG} = \rho\nabla_{KG} = \rho\Delta^r_{GK};$$
$$\pi^r_{A:K} = \rho\Delta^r_{A:K} = \rho\nabla^r_{A:K}; \qquad \pi^r_{G:K} = \rho\nabla^r_{G:K} - \rho\Delta^r_{G:K}.$$

В силу первой пары изоморфизмов имеем

(16.1) $$\pi^r_A = \pi^r_{A:K} + \pi^r_{KA}; \qquad \pi^r_G = \pi^r_{G:K} + \pi^r_{KG},$$

тогда как вторая пара изоморфизмов дает

(16.2) $$\pi^r_K = \pi^r_{KA} + \pi^r_{KG},$$

т. е.

$$\pi^r_K = (\pi^r_A - \pi^r_{A:K}) + (\pi^r_G - \pi^r_{G:K}).$$

Применяя третью пару изоморфизмов и заменяя r на $r+1$, получаем

(16.3) $$\pi^{r+1}_G = \pi^r_{A:K} + \pi^{r+1}_K - (\pi^{r+1}_A - \pi^{r+1}_{A:K})$$

или

(16.4) $$\pi_G^{r+1} = \pi_{A:K}^r + (\pi_K^{r+1} - \pi_{KA}^{r+1}).$$

В частном случае, когда K есть n-мерное h-многообразие, имеем по закону двойственности Пуанкаре $\pi_G^{r+1} = \pi_G^{n-r-1}$, так что (16.4) превращается в

(16.5) $$\pi_G^{n-r-1} = \pi_{A:K}^r + (\pi_K^{r+1} - \pi_{KA}^{r+1}).$$

Это — формула Понтрягина, ([11]), стр. 449, теорема II.

17. Приложение к регулярным компонентам. Пусть K — размерно-однородный n-мерный комплекс (это значит, что при $r < n$ для каждой клетки $t^r \in K$ найдется клетка $t^n > t^r$, $t^n \in K$). Назовем клетку t^{n-1} *регулярной*, если имеются лишь две клетки t_i^n такие, что $(t_i^n : t^{n-1}) > 0$. Вообще, r-мерная клетка $t^r \in K$, $r \leqslant n-1$ называется регулярной, если группа Δ^n ее (открытой) звезды в K по области коэффициентов **I** есть бесконечная циклическая группа (при $r = n-1$ получаем предыдущее определение). Последовательность n-мерных клеток

$$t_1^n, t_2^n, \ldots, t_s^n$$

называется r-цепью, если всякие две соседние клетки этой последовательности имеют общую грань размерности $\geqslant r-1$. Две n-мерные клетки по определению принадлежат к одной и той же r-компоненте комплекса K, если их можно соединить (в K) r-цепью. Если все клетки $t_i < t^n$ причислить к r-компоненте элемента t^n, то каждая r-компонента делается замкнутым подкомплексом комплекса K, и размерность клетки, принадлежащей двум различным r-компонентам, не может превосходить $r-2$. Комплекс K называется r-связным, если он состоит из одной r-компоненты. Комплекс K называется (n-мерным) псевдомногообразием, если он n-связен и если все его $(n-1)$-мерные элементы регулярны. Обычным образом определяется ориентируемость псевдомногообразия, причем легко видеть, что в случае ориентируемого псевдомногообразия K группа ∇_K^n (**I**) есть бесконечная циклическая группа, а в случае неориентируемого — группа порядка 2. Отсюда следует:

[17.1] Если комплекс K представлен в качестве суммы n-мерных псевдомногообразий, не имеющих попарно общих клеток размерности $\geqslant n-1$, то ∇_K^n (**I**) есть прямая сумма стольких бесконечных циклических групп, каково число ориентируемых псевдомногообразий в нашем разложении, и стольких групп порядка 2, сколько в этом разложении имеется неориентируемых псевдомногообразий.

Пусть теперь A_{n-1} есть подкомплекс комплекса K, состоящий из всех $(n-1)$-мерных нерегулярных клеток K и из всех их граней; n-компоненты комплекса $G_{n-1} = K \setminus A_{n-1}$ называются [([4]), стр. 190] *регулярными компонентами* комплекса K. Они образуют разбиение комплекса G_{n-1}, удовлетворяющее условиям (17.1), откуда следует, что число ориентируемых регулярных компонент комплекса K равно n-мерному числу Бетти комплекса G_{n-1}, а число всех регуляр-

ных компонент комплекса K равно n-мерному числу Бетти по модулю 2 комплекса G_{n-1}. Обозначая числа Бетти по модулю 2 через $\pi^r(2)$, число всех регулярных компонент комплекса K через q_K, а число ориентируемых регулярных компонент через $q_K^{(o)}$, выводим из только что сказанного и из формулы (16.4)

$$(17.2) \qquad q_h = \pi^{n-1}_{A_{n-1}:K}(2) + \pi^n_K(2); \quad q_K^{(o)} = \pi^{n-1}_{A_{n-1}:K} + \pi^n_K.$$

Если все $(n-1)$-мерные клетки K регулярны, то $q_K = \pi^n_K(2)$, $q_K^{(o)} = \pi^n_K$. Это имеет место для комплекса $G = K \setminus A$, *если A содержит все нерегулярные $(n-1)$-мерные клетки комплекса K*. Поэтому, применяя вновь формулу (16.4), получаем

(17.3) Если A содержит все $(n-1)$-мерные нерегулярные клетки комплекса K, то

$$[17.3] \qquad \begin{cases} q_K = \pi^{n-1}_{A:K}(2) + \pi^n_K(2) - \pi^n_{KA}(2), \\ q_G^{(o)} = \pi^{n-1}_{A:K} + \pi^n_K - \pi^n_{KA}. \end{cases}$$

Если, кроме того, размерность A не превосходит $n-1$, то

$$(17.3^{n-1}) \qquad \begin{cases} q_G = \pi^{n-1}_{A:K}(2) + \pi^n_K(2), \\ q_G^{(o)} = \pi^{n-1}_{A:K} + \pi^n_K. \end{cases}$$

Если A содержит все нерегулярные клетки комплекса K, имеющие размерность $\geqslant r$, то r-компоненты G совпадают с обыкновенными компонентами G. Поэтому, если A содержит все вообще нерегулярные клетки комплекса K, то в формулах (17.3) и (17.3^{n-1}) q_G есть число всех компонент, а $q_G^{(o)}$ — число всех ориентируемых компонент комплекса G.

Заметим, что если не делать никаких специальных предположений относительно подкомплекса A, то определение числа компонент комплекса G требует изучения свойств взаимного расположения трех комплексов: подкомплекса A, подкомплекса A_0, состоящего из всех нерегулярных элементов комплекса K, и объемлющего комплекса K. Это изучение таким образом оказывается поставленным на очередь. Даже простейшие элементарно-геометрические примеры показывают, как велико разнообразие могущих здесь встретиться возможностей.

18. **Теорема Фрагмена-Брауэра.** Обозначения K, A, G сохраняют свой смысл. Пусть $A = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 — замкнутые подкомплексы комплекса A. Полагаем $Q_1 = A \setminus A_1$, $Q_2 = A \setminus A_2$, $G_1 = K \setminus A_1$, $G_2 = K \setminus A_2$, $A_0 = A_1 \cap A_2$. Наконец, обозначаем через $E^i_{A:K}$, $i = 1, 2$, гомоморфизм группы $\nabla^r_{Q_i}$ в $\nabla^r_{A:K}$, ставящий в соответствие каждому элементу $z^r \in \nabla^r_{Q_i}$ класс $\mathfrak{z}^r \in \nabla^r_{A:K}$, содержащий элемент $E^{Q_i}_A z^r \in \nabla^r_A$. Докажем следующую основную формулу:

$$(18.1) \qquad (E^1_{A:K} \nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K} \nabla^r_{Q_2}) \approx \nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+1}_{G:G_2}.$$

Замечание. Рассматривая группу $\nabla^r_{A:K}$ как фактор-группу группы всех r-мерных ∇-циклов A по подгруппе продолжаемых циклов, можем сказать, что элементы группы $(E^1_{A:K} \nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K} \nabla^r_{Q_2})$ суть те классы

$\mathfrak{z}^r \in \nabla^r_{A:K}$, которые содержат как ∇-циклы комплекса Q_1, так и ∇-циклы комплекса Q_2. С другой стороны, элементы группы $\nabla^r_{G:G_1} \cap \nabla^r_{G:G_2}$ — это такие ∇-классы комплекса G, которые состоят из циклов, ограничивающих как на G_1 так и на G_2.

Изоморфизм (18.1) осуществляется оператором ∇E^A_K. В самом деле, пусть $\mathfrak{z}^r_A \in (E^1_{A:K}\nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K}\nabla^r_{Q_2})$; возьмем ∇-цикл $z^r_1 \in \mathfrak{z}^r_A$ на комплексе Q_1, — в силу только что сделанного замечания такой ∇-цикл z^r_1 существует. Цепь $E^A_K z^r_1$ равна нулю на A_1, поэтому $\nabla E^A_K z^r_1$ ограничивает на G_1; следовательно все элементы ∇-класса $\nabla E^A_K \mathfrak{z}^r_A \in \nabla^{r+1}_G$ ограничивают на G_1. Взяв $z^r_2 \in \mathfrak{z}^r_A \in (E^1_{A:K}\nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K}\Delta^r_{Q_2})$ на Q_2, убедились бы, что все элементы $\nabla E^A_K \mathfrak{z}^r_A$ ограничивают и на G_2. Итак, изоморфизм ∇E^A_K группы $\nabla^r_{A:K}$ на группу $\nabla^{r+1}_{G:K}$ отображает $(E^1_{A:K}\nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K}\nabla^r_{Q_2})$ в $\nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+2}_{G:G_2}$. Для доказательства того, что изоморфизм ∇E^A_K отображает $(E^1_{A:K}\nabla^r_{Q_1}) \cap (E^2_{A:K}\nabla^r_{Q_2})$ на $\nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+1}_{G:G_2}$, возьмем произвольно

$$z^{r+1}_G \in \nabla E^A_K \mathfrak{z}^r_A = \mathfrak{z}^{r+1}_G \in \nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+1}_{G:G_2}.$$

Так как z^{r+1}_G ограничивает на G_i, $i = 1, 2$, то существует $x^r_i \in L^r_{G_i}$, $\nabla x^r_i = z^{r+1}_G$. Поэтому цепь $z^r_A = I^K_A x^r_i$ есть ∇-цикл на Q_i и, в силу (15.1), имеем $\nabla E^A_K z^r_A \in \mathfrak{z}^{r+1}_G$. Итак, $z^r_A \in \mathfrak{z}^r_A$ и $\mathfrak{z}^r_A$ содержит как циклы комплекса Q_1, так и циклы комплекса Q_2, что и требовалось доказать.

Если комплекс K односвязен в равномерности r, то формула (18.1) переходит в

(18.2) $$(\nabla^r_{AQ_1} \cap \nabla^r_{AQ_2}) \approx (\nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+1}_{G:G_2}).$$

Но

$$\Delta^r_A \supseteq \Delta^r_{AA_i} \perp \nabla^r_{AQ_i} \subseteq \nabla^r_A, \quad i = 1, 2,$$

поэтому

$$\Delta^r_A \supseteq (\Delta^r_{AA_1} + \Delta^r_{AA_2}) \perp (\nabla^r_{AQ_1} \cap \nabla^r_{AQ_2}) \subseteq \nabla^r_A$$

(сумма, вообще говоря, не прямая) и

(18.3) $$\left(\Delta^r_A - (\Delta^r_{AA_1} + \Delta^r_{AA_2})\right) \mid (\nabla^r_{AQ_1} \cap \nabla^r_{AQ_2}).$$

Каждому Δ-циклу z^r комплекса A соответствует Δ-цикл

$$\Delta I^A_{Q_1} z^r = -\Delta I^A_{A_1} z^r \quad \text{на} \quad A_1 \cap A_2 = A_0$$

(оператор Δ действует на комплексе A). Это соответствие порождает гомоморфизм [так называемый «гомоморфизм шва», ([4]), стр. 292] группы Δ^r_A на $\Delta^{r-1}_{A_0:A_1} \cap \Delta^{r-1}_{A_0:A_2}$ с ядром $\Delta^r_{AA_1} + \Delta^r_{AA_2}$ [доказательство не трудно и приведено в ([4]), стр 289 — 293]. Таким образом

(18.4) $$\Delta^r_A - (\Delta^r_{AA_1} + \Delta^r_{AA_2}) \approx \Delta^{r-1}_{A_0:A_1} \cap \Delta^{r-1}_{A_0:A_2}.$$

Из (18.2) — (18.4) следует предложение, называемое нами

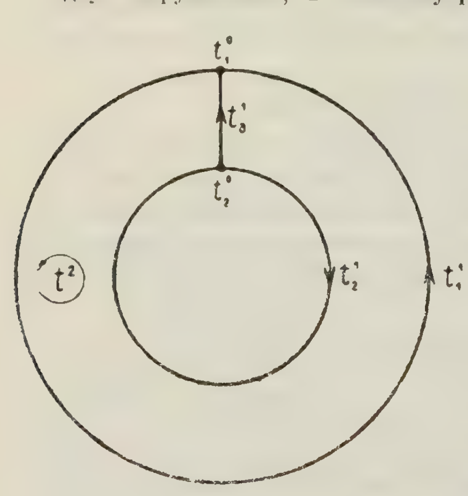
Теорема Фрагмена-Брауэра. *Если комплекс K односвязен в размерности r, то*

(18.5) $$(\Delta^{r-1}_{A_0:A_1} \cap \Delta^{r-1}_{A_0:A_2}) \mid (\nabla^{r+1}_{G:G_1} \cap \nabla^{r+1}_{G:G_2}).$$

19. Примеры. Закончим эту главу несколькими совершенно элементарными примерами, выясняющими геометрическое содержание введенных понятий и доказанных теорем.

1°. K — комплекс, состоящий из треугольника, всех его сторон и вершин. A состоит из сторон и вершин этого треугольника, G из одного лишь треугольника (его внутренности). Ориентированные элементы $\pm t^2$, $\pm t_i^1$, $\pm t_i^0$; $i = 1, 2, 3$, образуют клеточные комплексы, соответствующие K, A, G и обозначаемые теми же буквами. Мы находимся в условиях теоремы двойственности Александера-Колмогорова $\nabla_A^1 \approx \nabla_G^2 \approx \mathbf{I}$. Оператор ∇E ставит в соответствие ∇-классу комплекса A, состоящему из трех ∇-циклов t_1^1, t_2^1, t_3^1, двумерный ∇-класс комплекса G, состоящий из ∇-цикла t^2.

2°. Пусть **K** — плоское круговое кольцо, **A** — его граница, состоящая из двух окружностей, **Г** — его внутренность. Мы хотим рассмотреть группы фигуры K', A', G', где K' — какая-нибудь триангуляция кольца, A' — комплекс элементов K', лежащих на **A**, и G — комплекс элементов K, лежащих на **Г**. Эти группы изоморфны соответствующим группам фигуры K, A, G, где K есть клеточный комплекс, состоящий из элементов $\pm t^2$; $\pm t_2^1$, $\pm t_1^1$, $\pm$ $\pm t_1^0$, $\pm t_2^0$ с коэффициентами инцидентности $(t^2 : t_1^1) = (t^2 : t_2^1) = 1$, $(t^2 : t_3^1) = 0$; $(t_3^1 : t_1^0) = 1$, $(t_3^1 : t_2^0) = -1$; $(t_i^1 : t_j^0 = 0)$, при $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.



Клеточный комплекс A состоит из $\pm t_i^1$, $i = 1, 2$, и $\pm t_j^0$, $j = 1, 2$, и, наконец, G состоит из $\pm t^2$. Связь комплекса K с кольцом **K** ясна из чертежа. Все группы, о которых идет речь, суть в нашем случае свободные абелевы группы, поэтому они вполне определяются своими рангами, которые мы и указываем:

$$\pi_K^0 = \pi_{KA}^0 = 1; \quad \pi_A^0 = 2; \quad \pi_{A:K}^0 = 1; \quad \pi_G^0 = \pi_{KG}^0 = \pi_{G:K}^0 = 0;$$
$$\pi_K^1 = \pi_{KA}^1 = 1; \quad \pi_A^1 = 2; \quad \pi_{A:K}^1 = 1; \quad \pi_G^1 = \pi_{G:K}^1 = 1; \quad \pi_{KG}^1 = 0;$$
$$\pi_K^2 = \pi_{KA}^2 = \pi_A^2 = \pi_{A:K}^2 = \pi_{KG}^2 = 0; \qquad \pi_G^2 = \pi_{G:K}^2 = 1.$$

3°. **K** — проективная плоскость, **A** — прямая на ней; соответствующий клеточный комплекс K состоит из $\pm t^2$, $\pm t^1$, $\pm t^0$ с коэффициентами инцидентности $(t^2 : t^1) = 2$, $(t^2 : t^0) = 0$. Комплекс A состоит из $\pm t^1$ и $\pm t^0$. Группа $\Delta_{A:K}(\mathbf{I})$ состоит из всех элементов вида $2nt^1$ при любом целом n и, значит, есть бесконечная циклическая группа. Группа $\Delta_{G:K}^2(\mathbf{I}) = \Delta_G^2(\mathbf{I})$ состоит из всех элементов вида nt^2 и, значит, есть также бесконечная циклическая группа.

4°. K состоит из элементов $\pm t_1^2$, $\pm t_2^2$; $\pm t^1$; $\pm t^0$ с коэффициентами инцидентности $(t_1^2 : t^1) = (t_2^2 ; t^1) = 2$, $(t^1 : t^0) = 0$ (пара проективных плоскостей, пересекающихся по прямой). Пусть сначала A состоит из $\pm t_1^2$, $\pm t^1$, $\pm t^0$. ∇-группы берем по области коэффициентов $\mathbf{I}$, Δ-группы — по области коэффициентов $\mathbf{I}$. Тогда $\nabla_K^2 \approx \mathbf{I} + \mathbf{I}_2$ (образующие элементы: t_1^2 бесконечного порядка и $t_1^2 - t_2^2$ порядка 2), в соответствии с чем $\Delta_K^2 \approx \mathbf{I} + \mathbf{I}_2$ (группа Δ_K^2 имеет своими прямыми слагаемыми подгруппу $\{c(t_1^2 - t_2^2)\}$, $c \in I$, и подгруппу второго порядка, состоящую из 0 и из $\frac{1}{2} t_1^2\Big)$. Далее $\nabla_{KG}^2 = \nabla_G^2 \approx \mathbf{I}$, $\Delta_{KA}^2 \approx \mathbf{I}_2$, $\nabla_{AK}^2 = \nabla_A^2 \approx I_2$, $\nabla_A^1 \approx \nabla_G^1 = 0$; $\nabla_{A:K}^1 = \nabla_{G:K}^2 = 0$. Аннуляция $\Delta_K^2 \supseteq \Delta_{KA}^2 \perp \nabla_{KG}^2 \subseteq \nabla_K^2$ имеет в нашем случае особенно простой геометрический смысл.

Пусть теперь A состоит из $\pm t^1$, $\pm t^0$ (из прямой пересечения обеих плоскостей). Тогда $\nabla_A^1 \approx \mathbf{I}$, а так как $\nabla_K^1 = 0$, то $\nabla_{A:K}^1 = \nabla_A^1 = \mathbf{I}$. Далее, $\nabla_{KG}^2 = \nabla_K^2 \approx \mathbf{I} + \mathbf{I}_2$, $\nabla_G^2 \approx \mathbf{I} + \mathbf{I}$, а $\nabla_{G:K}^2$ состоит из элементов вида $2n(t_1^2 - t_2^2)$ при n любом целом, значит является в соответствии с (14.3') бесконечной циклической группой.

5°. Пусть $\mathbf{K}$ — трехмерное кольцо (внутренность тора вместе с границей). $\mathbf{A}$ — кольцевидное тело, гомеоморфное $\mathbf{K}$, лежащее внутри $\mathbf{K}$ и обегающее $\mathbf{K}$ два раза; $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$. Через K обозначаем некоторое симплициальное разбиение $\mathbf{K}$ и предполагаем, что $\mathbf{A}$ целиком слагается из некоторых симплексов этого разбиения. Соответствующий замкнутый подкомплекс K обозначаем через A; тогда $\mathbf{\Gamma}$ разбито на симплексы открытого подкомплекса $G = K \setminus A$. За область коэффициентов берем в Δ-группах $\mathbf{I}$, в ∇-группах $\mathbf{I}$. Нетрудно видеть, что $\Delta_{KA}^1 = 2\Delta_K^1$, следовательно $\Delta_{GK}^1 \approx \mathbf{I}_2$, а потому и $\nabla_{KG}^1 \approx \mathbf{I}_2$ (за образующую группы Δ_{GK}^1 можно принять экватор тора, ограничивающего тело $\mathbf{K}$; дважды взятый, он гомологичен нулю в G). Группа Δ_{KA}^1 не является прямым слагаемым группы Δ_K^1.

6°. K есть двумерный комплекс, возникающий, если в двумерной сфере склеить между собою оба полюса. Замкнутый подкомплекс A состоит из двух параллельных кругов сферы. По формуле (16.4) имеем

$$\pi_G^2 = \pi_{A:K}^1 + \pi_K^2 - \pi_{KA}^2 = 2 + 1 - 0 = 3.$$

7°. Элементарные примеры на теорему Фрагмена-Брауэра (сфера или тор в пространстве, разрезанные на две половины и т. п.) общеизвестны. Примером на формулу (18.1) может служить тор K с парой меридианов $A = A_1 + A_2$. Меридианы A_1 и A_2, ориентированные противоположным образом, образуют (в надлежащем клеточном разбиении K, в котором эти меридианы являются клетками) два ∇-цикла на A, разность которых продолжаема на K и которые принадлежат таким образом к одному и тому же классу — элементу $\nabla_{A:K}^1$; этот класс является элементом группы $(E_{A:K}^1 \nabla_{Q_1}^1) \cap (E_{A:K}^2 \nabla_{Q_2}^1)$, где $Q_1 = A_2$, $Q_2 = A_1$, и этот элемент, как легко видеть, является образующим элементом группы $(E_{A:K}^1 \nabla_{Q_1}^1) \cap (E_{A:K}^2 \nabla_{Q_2}^1)$, которая таким образом оказывается бесконечной циклической группой. В соответствии с этим бесконечной циклической группой

является и группа $\nabla^2_{G:G_1} \cap \nabla^2_{G:G_2}$; за ее образующую можно принять ∇-цикл $t_1^2 - t_2^2$, где клетки t_1^2 и t_2^2 являются ориентированными областями, на которые тор разбивается двумя своими меридианами A_1 и A_2.

ГЛАВА II. СПЕКТРЫ

§ 5. Клеточные спектры и их группы Бетти

20. Проекции. Пусть K_α и K_β — клеточные комплексы. Предположим, что для всех размерностей r дан гомоморфизм $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ группы L_β^r (I) всех целочисленных r-мерных цепей K_β в группу L_α^r (I) всех целочисленных r-мерных цепей комплекса K^α, коммутирующий с оператором Δ:

(20.1) $$\Delta \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta^r = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \Delta x_\beta^r \text{ для любого } x_\beta^r \in L_\beta^r(\mathrm{I}).$$

Тогда система гомоморфизмов $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, определенных для всех r, называется *проекцией* клеточного комплекса K_β в клеточный комплекс K_α.

Пусть $A_\alpha \subseteq K_\alpha$, $A_\beta \subseteq K_\beta$ — замкнутые подкомплексы и $G_\alpha = K_\alpha \setminus A_\alpha$, $G_\beta = K_\beta \setminus A_\beta$. Будем систематически писать: $L_{\alpha 0}^r$, $L_{\alpha 1}^r$, $\mathrm{I}_{\alpha 0}^\alpha$, $\mathrm{I}_{\alpha 1}^\alpha$ и т. д. вместо $L_{A_\alpha}^r$, $L_{G_\alpha}^r$, $\mathrm{I}_{A_\alpha}^{K_\alpha}$, $\mathrm{I}_{G_\alpha}^{K_\alpha}$ и т. д. Проекция $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ комплекса K_β в K_α называется *когредиентной* с A_β, A_α, если она отображает $L_{\beta 0}^r$ (I) в $L_{\alpha 0}^r$ (I) (при этом естественно $L_{\beta 0}^r$, $L_{\alpha 0}^r$ считаются подгруппами соответственно L_β^r, L_α^r, см. п. 11, замечание). Такая проекция $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ естественным образом порождает проекцию $\tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0}$ комплекса A_β в A_α. С другой стороны, полагая для любой цепи $x_{\beta 1}^r \in L_{\beta 1}^r$ (I)

$$\tilde{\omega}_{\alpha 1}^{\beta 1} x_{\beta 1}^r = \mathrm{I}_{\alpha 1}^\alpha \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_{\beta 1}^r,$$

получаем (указывая нижним индексом $\alpha 1$, α, β, $\beta 1$, что оператор Δ рассматривается на G_α, K_α, K_β, G_β):

$$\Delta_{\alpha 1} \tilde{\omega}_{\alpha 1}^{\beta 1} x_{\beta 1}^r = \Delta_{\alpha 1} \mathrm{I}_{\alpha 1}^\alpha \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_{\beta 1}^r = \mathrm{I}_{\alpha 1}^\alpha \Delta_\alpha \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_{\beta 1}^r = \mathrm{I}_{\alpha 1}^\alpha \tilde{\omega}_\alpha^\beta \Delta_\beta x_{\beta 1}^r = \tilde{\omega}_{\alpha 1}^{\beta 1} \Delta_{\beta 1} x_{\beta 1}^r.$$

Итак,

[20.2] проекция $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ комплекса K_β в K_α, когредиентная с A_β, A_α, порождает проекцию $\tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0}$ комплекса A_β в A_α и проекцию $\tilde{\omega}_{\alpha 1}^{\beta 1}$ комплекса G_β в G_α.

21. Сопряженные гомоморфизмы. Проекция $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ комплекса K_β в K_α ставит в соответствие каждой цепи $\bar{x}_\beta^r = \sum a_j t_{\beta j}^r$ комплекса K_β по области коэффициентов $\mathfrak{A}$ цепь $\bar{x}_\alpha^r = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \bar{x}_\beta^r = \sum a_j \tilde{\omega}_\alpha^\beta t_{\beta j}^r$ комплекса K_α по той же области коэффициентов $\mathfrak{A}$ и таким образом производит гомоморфизм $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ группы $\bar{L}_\beta^r = L_\beta^r(\mathfrak{A})$ в группу $\bar{L}_\alpha^r = L_\alpha^r(\overline{\mathfrak{A}})$, также называемый *проекцией* и коммутирующий в смысле равенства (20.1) с оператором Δ.

При $\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{A}}$ гомоморфизм π_β^α группы $L_\alpha^r = L_\alpha^r(\mathfrak{A})$ в группу $L_\beta^r = L_\beta^r(\mathfrak{A})$, сопряженный гомоморфизму $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, ставит в соответствие каждой цепи $x_\alpha^r \in L_\alpha^r$ цепь $\pi_\beta^\alpha x_\alpha^r \in L_\beta^r$, определенную формулой

(21.1) $$(\pi_\beta^\alpha x_\alpha^r \cdot t_{\beta j}^r) = (x_\alpha^r \cdot \tilde{\omega}_\alpha^\beta t_{\beta j}^r) \text{ для любого } t_{\beta j}^r \in K_\beta.$$

Гомоморфизм π^α_β коммутирует с оператором ∇, как видно из

$$(\nabla\pi^\alpha_\beta x^r_\alpha \cdot t^{r+1}_{\beta j}) = (\pi^\alpha_\beta x^r_\alpha \cdot \Delta t^{r+1}_{\beta j}) = (x^r_\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta_\alpha \Delta t^{r+1}_{\beta j}) = (x^r_\alpha \cdot \Delta\tilde{\omega}^\beta_\alpha t^{r+1}_{\beta j}) = \\ = (\nabla x^r_\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta_\alpha t^{r+1}_{\beta j}) = (\pi^\alpha_\beta \nabla x^r_\alpha \cdot t^{r+1}_{\beta j}).$$

Если $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$ когредиентно с A_β, A_α, то для всякой цепи $x^r_{\alpha 1} \in L^r_{\alpha 1}$ и любого $t^r_{\beta 0} \in A_\beta$ имеем $(\pi^\alpha_\beta x^r_{\alpha 1} \cdot t^r_{\beta 0}) = (x^r_{\alpha 1} \cdot \tilde{\omega}^\beta_\alpha t^r_{\beta 0}) = 0$, так что π^α_β отображает $L^r_{\alpha 1}$ в $L^r_{\beta 1}$ и, следовательно, порождает гомоморфизм $\pi^{\alpha 1}_{\beta 1}$ группы $L^r_{\alpha 1}$ в $L^r_{\beta 1}$, совпадающий на $L^r_{\alpha 1} \subseteq L^r_\alpha$ с π^α_β и сопряженный гомоморфизму $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$.

С другой стороны, гомоморфизм $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0}$, сопряженный гомоморфизму $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$, определяется формулой

$$\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} x^r_{\alpha 0} = \mathbf{I}^\beta_{\beta 0} \pi^\alpha_\beta x^r_{\alpha 0} \quad \text{для любого} \quad x^r_{\alpha 0} \in L^r_{\alpha 0}.$$

Итак,

$$(21.2)\quad \pi^\alpha_\beta \Big\downarrow \begin{vmatrix} L^r_\alpha & \overline{L}^r_\alpha \\ L^r_\beta & \overline{L}^r_\beta \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^\beta_\alpha; \quad \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} \Big\downarrow \begin{vmatrix} L^r_{\alpha 0} & \overline{L}^r_{\alpha 0} \\ L^r_{\beta 0} & \overline{L}^r_{\beta 0} \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}; \quad \pi^{\alpha 1}_{\beta 1} \Big\downarrow \begin{vmatrix} L^r_{\alpha 1} & \overline{L}^r_{\alpha 1} \\ L^r_{\beta 1} & \overline{L}^r_{\beta 1} \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1},$$

где

$$(21.3)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0} = \tilde{\omega}^\beta_\alpha; & \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} = \mathbf{I}^\beta_{\beta 0} \pi^\alpha_\beta; \\ \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} \tilde{\omega}^\beta_\alpha; & \pi^{\alpha 1}_{\beta 1} = \pi^\alpha_\beta. \end{cases}$$

Так как гомоморфизмы $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$, $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$, $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$ коммутируют с Δ, а π^α_β, $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0}$, π^α_β с ∇, то $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$, $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$, $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$ отображают группы Δ^r_β, $\Delta^r_{\beta 0}$, $\Delta^r_{\beta 1}$ соответственно в Δ^r_α, $\Delta^r_{\alpha 0}$, $\Delta^r_{\alpha 1}$, а π^α_β, $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0}$, $\pi^{\alpha 1}_{\beta 1}$ отображают группы ∇^r_α, $\nabla^r_{\alpha 0}$, $\nabla^r_{\alpha 0}$ соответственно в ∇^r_β, $\nabla^r_{\beta 0}$, $\nabla^r_{\beta 1}$. Итак,

$$(21.4)\quad \pi^\alpha_\beta \Big\downarrow \begin{vmatrix} \nabla^r_\alpha & \Delta^r_\alpha \\ \nabla^r_\beta & \Delta^r_\beta \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^\beta_\alpha; \quad \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} \Big\downarrow \begin{vmatrix} \nabla^r_{\alpha 0} & \Delta^r_{\alpha 0} \\ \nabla^r_{\beta 0} & \Delta^r_{\beta 0} \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}; \quad \pi^{\alpha 1}_{\beta 1} \Big\downarrow \begin{vmatrix} \nabla^r_{\alpha 1} & \nabla^r_{\alpha 1} \\ \nabla^r_{\beta 1} & \Delta^r_{\beta 1} \end{vmatrix} \Big\uparrow \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}.$$

Заметим, наконец, что из самого определения гомоморфизмов $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$, $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$ и т. д. следует

$$(21.5)\quad \tilde{\omega}^\beta_\alpha E^{\beta 0}_\beta \overline{x}^r_{\beta 0} = E^{\alpha 0}_\alpha \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0} x^r_{\beta 0}; \quad \pi^\alpha_\beta E^{\alpha 1}_\alpha x^r_{\alpha 1} = E^{\beta 1}_{\alpha 1} \pi^{\alpha 1}_{\beta 1} x^r_{\alpha 1};$$

$$(21.6)\quad \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 0} x^r_\alpha = \mathbf{I}^\beta_{\beta 0} \pi^\alpha_\beta x^r_\alpha; \qquad \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1} \mathbf{I}^\beta_{\beta 1} x^r_\beta = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} \tilde{\omega}^\beta_\alpha \overline{x}^r_\beta.$$

22. **Клеточные спектры.** Две проекции комплекса K_β в K_α называются г о м о л о г и ч н ы м и между собою, если они порождают один и тот же гомоморфизм групп Δ^r_β в Δ^r_α.

Пусть дано неограниченное, частично упорядоченное множество клеточных комплексов K_α; мы пишем $\beta > \alpha$, если в этом множестве K_β следует за K_α; «неограниченное» — означает, что для любых двух K_α, K_β имеется K_γ, следующее как за K_α, так и за K_β (мы пишем $\gamma > \alpha, \beta$). Предположим, что для любой пары α, β определено конечное число «допустимых» проекций $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$ комплекса K_β в K_α, так что:

1° любые две допустимые проекции K^α_β в K_α гомологичны между собою;

2° если $\gamma > \beta > \alpha$ и $\tilde{\omega}_\beta^\gamma$, $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ — допустимые проекции, то проекция $\tilde{\omega}_\alpha^\gamma = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \tilde{\omega}_\beta^\gamma$ комплекса K_γ в K_α также допустима.

В этих условиях частично упорядоченное множество комплексов K_α вместе с определенными в этом множестве допустимыми проекциями называется **клеточным спектром** $K = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$.

Каждый клеточный спектр определяет две **системы гомоморфизмов** или два «групповых спектра» [см. ([13]), стр. 668—669, или ([1]), стр. 20—22], **обратную систему** $\{\Delta_\alpha^r, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ и **прямую систему** $\{\nabla_\alpha^r, \pi_\beta^\alpha\}$, причем гомоморфизмы одной системы сопряжены гомоморфизмам другой системы, откуда следует, что предельные группы обеих систем (*группы Бетти спектра* $K = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$)

$$\Delta_K^r = \underset{\longleftarrow}{\lim} (\Delta_\alpha^r, \tilde{\omega}_\alpha^\beta), \qquad \nabla_K^r = \underset{\longrightarrow}{\lim} (\nabla_\alpha, \pi_\beta^\alpha)$$

двойственны между собой.

Предположим теперь, что проекции $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ нашего спектра когредиентны с данными замкнутыми подкомплексами $A_\beta \subseteq K_\beta$, $A_\alpha \subseteq K_\alpha$ и что, кроме того, проекции $\tilde{\omega}'^{\beta 0}_{\alpha 0}$ и $\tilde{\omega}'^{\beta 0}_{\alpha\beta 0}$ комплекса A_β в комплекс A_α, а также проекции $\tilde{\omega}'^{\beta 1}_{\alpha 1}$ и $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$ комплекса G_β в G_α, порожденные двумя какими-нибудь допустимыми проекциями $\tilde{\omega}'^\beta_\alpha$ и $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$, гомологичны между собою (все это для любой пары $\beta > \alpha$). В этом случае мы говорим, что спектр $K = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ *когредиентен с подкомплексами* $A_\alpha \subseteq K$ и $G_\alpha = K_\alpha \setminus A_\alpha$; такой спектр очевидно определяет два новых спектра $A = \{A_\alpha, \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}\}$ и $G = \{G_\alpha, {}^{\beta 1}_{\alpha 1}\}$, и мы имеем группы Бетти

$$\Delta_A^r = \underset{\longleftarrow}{\lim} (\Delta_{\alpha 0}, \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}) \qquad \nabla_A^r = \underset{\longrightarrow}{\lim} (\nabla_{\alpha 0}, \pi^{\alpha 0}_{\beta 0}),$$

$$\nabla_G^r = \underset{\longrightarrow}{\lim} (\nabla_{\alpha 1}, \pi^{\alpha 1}_{\beta 1}), \quad \Delta_G^r = \underset{\longleftarrow}{\lim} (\Delta_{\alpha 1}^r, \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}),$$

и двойственности

$$\Delta_A^r \mid \nabla_A^r, \quad \Delta_G^r \mid \nabla_G^r.$$

§ 6. Перенесение результатов главы I на спектры K, A, G

23. Леммы о системах гомоморфизмов. Пусть $\{H_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ — прямая система гомоморфизмов с предельной группой H. **Спектральное множество**, т. е. теоретико-множественная сумма всех групп H_α (которые считаем попарно не пересекающимися) распадается на «**пучки**»: два элемента $h_\alpha \in H_\alpha$, $h_\beta \in H_\beta$ принадлежат к одному и тому же пучку, если для некоторого $\gamma > \alpha, \beta$ имеем $\pi_\gamma^\alpha h_\alpha = \pi_\gamma^\alpha h_\beta$. Эти пучки являются элементами группы H [см. ([1]), стр. 21].

Пусть $\{\bar{H}_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ — обратная система гомоморфизмов с предельной группой H. Элементами группы H являются «**нити**» системы $\{\bar{H}_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, т. е. множества $\bar{h} = (\bar{h}_\alpha)$, удовлетворяющие условиям:

1° каждое $\bar{h}_\alpha$ есть элемент группы $\bar{H}_\alpha$, и $\bar{h}$ содержит по одному элементу каждой из групп H_α;

2° если $\bar{h}_\alpha \in \bar{h}$, $\bar{h}_\beta \in \bar{h}$ и $\beta > \alpha$, то $\bar{h}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^\beta \bar{h}_\beta$.

ЛЕММА [23.1]. *Если в обратной системе* $\{\bar{H}_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ *даны подгруппы* $H_{\alpha 0} \subseteq H_\alpha$, и $\tilde{\omega}_\alpha^\beta \bar{H}_{\beta 0} \subseteq H_{\alpha 0}$ *при* $\beta > \alpha$, *то группы* $H_{\alpha 0}$ *с гомоморфизмами* $\tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0} = \tilde{\omega}_\alpha^\beta$ *образуют обратную систему, и* $H_0 = \varprojlim (\bar{H}_{\alpha 0}, \tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0})$ *есть подгруппа группы* $\bar{H} = \varprojlim (H_\alpha, \omega_\alpha^\beta)$.

Если в прямой системе гомоморфизмов $\{H_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ *даны подгруппы* $H_{\alpha 0} \subseteq H_\alpha$, и $\pi_\beta^\alpha H_{\alpha 0} \subseteq H_{\beta 0}$, *то группы* $H_{\alpha 0}$ *с их гомоморфизмами* $\pi_{\beta 0}^{\alpha 0} = \pi_\beta^\alpha$ *образуют прямую систему* $\{H_{\alpha 0}, \pi_{\beta 0}^{\alpha 0}\}$. *Каждый пучок системы* $\{H_{\alpha 0}, \pi_{\beta 0}^{\alpha 0}\}$ *содержится в определенном пучке системы* $\{H_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$, *и каждый пучок системы* $\{H_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ *содержит не более одного пучка системы* $\{H_{\alpha 0}, \pi_{\beta 0}^{\alpha 0}\}$. *Таким образом группа* $H_0 = \varinjlim (H_{\alpha 0}, \pi_{\beta 0}^{\alpha 0})$ *изоморфно отображена на некоторую подгруппу группы* $H = \varinjlim (H_\alpha, \pi_\beta^{\alpha 0})$ *и может быть отождествлена с этой подгруппой.* Эта лемма очевидна.

ЛЕММА [23.2]. *В условиях предыдущей леммы группа*

$$H_{\beta:\beta 0} = \bar{H}_\beta - \bar{H}_{\beta 0};\quad H_{\alpha:\alpha 0} = H_\alpha - H_{\alpha 0}$$

отображена посредством

$$\omega_\alpha^\beta \text{ на } \bar{H}_{\alpha:\alpha 0} = \bar{H}_\alpha - H_{\alpha 0};\qquad \pi_\beta^\alpha \text{ на } H_{\beta:\beta 0} = H_\beta - H_{\beta 0},$$

причем

$$\bar{H} - \bar{H}_0 = \varprojlim (\bar{H}_{\alpha:\alpha 0}, \tilde{\omega}_\alpha^\beta);\qquad H - H_0 = \varinjlim (H_{\alpha:\alpha 0}, \pi_\beta^\alpha).$$

Для доказательства левого равенства ставим в соответствие каждой нити $\{\bar{h}_\alpha\} \in \bar{H}$, входящей в данный класс $\bar{x} \in \bar{H} - \bar{H}_0$, нить $\{\bar{x}_\alpha\} \in \varprojlim (H_\alpha - \bar{H}_{\alpha 0}, \tilde{\omega}_\alpha^\beta)$, удовлетворяющую условию: $\bar{h}_\alpha \in \bar{x}_\alpha$. Это соответствие и является, как легко видеть, искомым изоморфизмом между $H - \bar{H}_0$ и $\varprojlim (H_\alpha - H_{\alpha 0}; \tilde{\omega}_\alpha^\beta)$.

Для доказательства правого равенства определим группу H' следующим образом. Назовем два элемента $h_\alpha \in H_\alpha$, $h_\beta \in H_\beta$ э к в и в а л е н т н ы м и о т н о с и т е л ь н о H_0, если существует такое $\gamma > \alpha, \beta$, что $\pi_\gamma^\alpha h_\alpha - \pi_\gamma^\beta h_\beta \in H_{\gamma 0}$. Полученные классы эквивалентных между собою элементов спектрального множества являются по определению элементами группы H'. Сумма двух элементов $u' \in H'$ и $u'' \in H'$ определяется так: берем $u'_\alpha \in u'$, $u''_\beta \in u''$ и $\gamma > \alpha, \beta$; по определению $u' + u''$ есть класс, содержащий $\pi_\gamma^\alpha u'_\alpha + \pi_\alpha^\beta u''_\beta$. Группа H' находится в состоянии естественного изоморфизма с каждой из групп $H - H_0$ и $\varinjlim (H_\alpha - H_{\alpha 0}, \pi_\beta^\alpha)$ и может быть отождествлена с каждой из этих групп.

---

* Мы заменяем знак изоморфизма знаком раненства между двумя изоморфными группами, если среди всех изоморфизмов между этими группами выделен определенный «естественный» изоморфизм, позволяющий в дальнейшем считать обе эти группы тождественными.

ЛЕММА [23.3]. *Пусть даны две прямые (две обратные) системы гомоморфизмов* $\{U_\alpha, \rho_\beta^\alpha\}$ *и* $\{V_\alpha, \sigma_\beta^\alpha\}$ *(соответственно* $\{\overline{U}_\alpha, \bar\rho_\alpha^\beta\}$ *и* $\{\overline{V}_\alpha, \bar\sigma_\alpha^\beta\}$*); элементы* U_α *и* V_α *(*$\overline{U}_\alpha$ *и* $\overline{V}_\alpha$*) в каждой паре систем взаимнооднозначно соответствуют друг другу. Предположим, что для каждого* α *дан гомоморфизм* f_α *группы* U_α *в* V_α *(*$\bar f_\alpha$ *группы* $\overline{V}$ *в* $\overline{U}_\alpha$*) такой, что для каждой пары* $\beta > \alpha$ *и* $u_\alpha \in U_\alpha$ *(соответственно* $\bar v_\beta \in \overline{V}_\beta$*) имеем*

$$\sigma_\beta^\alpha f_\alpha u_\alpha = f_\beta \rho_\beta^\alpha u_\alpha; \quad \bar\rho_\alpha^\beta \bar f_\beta \bar v_\beta = \bar f_\alpha \bar\sigma_\alpha^\beta \bar v_\beta. \tag{23.31}$$

Совокупность гомоморфизмов f_α *(соответственно* $\bar f_\alpha$*) называется гомоморфным отображением системы* $\{U_\alpha, \rho_\beta^\alpha\}$ *в систему* $\{V_\alpha \sigma_\beta^\alpha\}$ *(соответственно системы* $\{\overline{V}_\alpha, \bar\sigma_\alpha^\beta\}$ *в* $\{\overline{U}_\alpha, \bar\rho_\alpha^\beta\}$*) и следующим образом определяет гомоморфизм* f *группы* $U = \varinjlim\, (U_\alpha, \rho_\beta^\alpha)$ *в* $V = \varinjlim\, V_\alpha, \sigma_\beta^\alpha)$ *(гомоморфизм* $\bar f$ *группы* $\overline{V} = \varprojlim\, (V_\alpha, \bar\sigma_\alpha^\beta)$ *в* $\overline{U} = \varinjlim\, (\overline{U}_\alpha, \bar\rho_\alpha^\beta)$*): каждому пучку* $u = \{u_\alpha\}$ *(каждой нити* $\bar v = \{\bar v_\alpha\}$*) ставится в соответствие пучок* fu*, содержащий для какого-нибудь* $u_\alpha \in U_\alpha$ *элемент* $f_\alpha u_\alpha$ *(нить* $\bar f \bar v = \{\bar f_\alpha \bar v_\alpha\}$*).*

Доказательство этой леммы, так же как и доказательство следующей леммы, может быть предоставлено читателю.

ЛЕММА [23.4]. *В условиях леммы* [23.3] *имеем*

$$\sigma_\beta^\alpha f_\alpha U_\alpha \subseteq f_\beta U_\beta; \quad \bar\sigma_\alpha^\beta \bar f_\beta \overline{V}_\beta \subseteq \bar f_\alpha V_\alpha, \tag{23.41}$$

следовательно (принимая во внимание лемму [23.1]),

$$\varinjlim\, (f_\alpha U_\alpha, \sigma_\beta^\alpha) = fU; \ \varprojlim\, (\bar f_\alpha \overline{V}_\alpha, \bar\rho_\alpha^\beta) = \bar f \overline{V}. \tag{23.42}$$

То же для ядер гомоморфизмов:

$$\rho_\beta^\alpha (f_\alpha^{-1} O_{V_\alpha}) \subseteq f_\beta^{-1} O_{V_\beta}; \ \bar\sigma_\alpha^\beta (\bar f_\beta^{-1} O_{\overline{U}_\beta}) \subseteq \bar f_\alpha^{-1} O_{\overline{U}_\alpha}; \tag{23.43}$$

$$\varinjlim\, (f_\alpha^{-1} O_{V_\alpha}, \rho_\beta^\alpha) = f^{-1} O_V; \ \varprojlim\, (\bar f_\alpha^{-1} O_{\overline{U}_\alpha}, \sigma_\alpha^\beta) = \bar f^{-1} O_{\overline{U}}. \tag{23.44}$$

Наконец,

ЛЕММА [23.5]. *Если в условиях леммы* [23.3] *имеем*

$$f_\alpha \Big\downarrow \begin{array}{cc} U_\alpha & \overline{U}_\alpha \\ V_\alpha & \overline{V}_\alpha \end{array} \Big\uparrow \bar f_\alpha,$$

то

$$f \Big\downarrow \begin{array}{cc} U & \overline{U} \\ V & \overline{V} \end{array} \Big\uparrow \bar f.$$

Доказательство следует из определения скалярного произведения для предельных групп [([13]), стр. 670, формула (6.2)], а именно: для любых $u \in \lim\, (U_\alpha, \rho_\beta^\alpha)$, $\bar u \in \lim\, (\overline{U}_\alpha, \rho_\alpha)$ имеем по определению

$$(u \cdot \bar u) = (u_\alpha \cdot \bar u_\alpha), \tag{23.51}$$

где u_α произвольно выбрано в u. Из формулы (23.41) тогда следует

$$(fu \cdot \bar v) = (f_\alpha u_\alpha \cdot \bar v_\alpha) = (u_\alpha \cdot \bar f_\alpha \bar v_\alpha) = (u \cdot \bar f \bar v).$$

24. Более простая форма определения групп $\nabla^r_K, \nabla^r_A, \nabla^r_G$. Лемма [23.2] позволяет дать определению групп $\nabla^r_K, \nabla^r_A, \nabla^r_G$ следующую более простую форму: два ∇-цикла z^r_α и z^r_β комплексов K_α и K_β (соответственно A_α и A_β или G_α и G_β) по определению принадлежат к одному и тому же ∇-классу спектра K (соответственно спектра A или спектра G), если существует такое $\gamma > \alpha, \beta$, что $\pi^\alpha_\gamma z^r_\alpha - \pi^\beta_\gamma z^r_\beta$ (соответственно $\pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^r_\alpha - \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^r_\beta$, $\pi^{\alpha 1}_{\gamma 1} z^r_\alpha - \pi^{\beta 1}_{\gamma 1} z^r_\beta$) ограничивает на K_γ (на A_γ, на G_γ). Эти ∇-классы и являются элементами группы ∇^r_K (группы ∇^r_A, группы ∇^r_G). Для сложения двух ∇-классов $\mathfrak{z}^r_1, \mathfrak{z}^r_2$ надо произвольно взять $z^r_\alpha \in \mathfrak{z}^r_1$, $z^r_\beta \in \mathfrak{z}^r_2$, $\gamma > \alpha, \beta$ и определить $\mathfrak{z}^r_1 + \mathfrak{z}^r_2$ как ∇-класс, содержащий $\pi^\alpha_\gamma z^r_\alpha + \pi^\beta_\gamma z^r_\beta$.

25. Гомоморфизмы вложения и высечения. Группы фигуры K, A, G и теоремы о них. В силу формул (21.5), (21.6) и лемм [23.3], [23.5] гомоморфизмы $E^{\alpha 0}_\alpha$, $E^{\alpha 1}_\alpha$, $\mathrm{I}^\alpha_{\alpha 0}$, $\mathrm{I}^\alpha_{\alpha 1}$ порождают соответственно гомоморфизмы E^A_K, E^G_K, I^K_A, I^K_G согласно фигуре

$$(25.\ )\qquad \mathrm{I}^K_A\Big\uparrow \begin{array}{cc} \nabla^r_K & \Delta^r_K \\ \nabla^r_A & \Delta^r_A \end{array} \Big\uparrow E^A_K; \qquad \mathrm{I}^K_G\Big\downarrow \begin{array}{cc} \Delta^r_K & \nabla^r_K \\ \Delta^r_G & \nabla^r_G \end{array}.$$

В соответствии с леммой [23.4] определяем:

$$(25.2)\qquad \left.\begin{array}{l} \nabla^r_{AK} = \mathrm{I}^K_A \nabla^r_K = \varinjlim \nabla(^r_{A_\alpha K_\alpha}, \pi^{\alpha 0}_{\beta 0});\ \Delta^r_{KA} = E^A_K \Delta^r_A = \varprojlim (\Delta^r_{K_\alpha A_\alpha}, \tilde{\omega}^\beta_\alpha); \\ \Delta^r_{GK} = \mathrm{I}^K_G \Delta^r_K = \varprojlim (\Delta^r_{G_\alpha K_\alpha}, \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1});\ \nabla^r_{KG} = E^G_K \nabla^r_G = \varinjlim (\nabla^r_{K_\alpha A_\alpha}, \pi^\alpha_\beta). \end{array}\right\}$$

$$(25.3)\qquad \left.\begin{array}{l} \Delta^r_{A:K} = (E^A_K)^{-1}\, 0_K = \varprojlim (\Delta^r_{A_\alpha : K'_\alpha}, \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}); \\ \nabla^r_{G:K} = (E^G_K)^{-1}\, 0_K = \varinjlim (\nabla^r_{G_\alpha K_\alpha}, \pi^{\alpha 1}_{\beta 1}); \\ \nabla^r_{A:K} = \nabla^r_A - \nabla^r_{AK} = \varinjlim (\nabla^r_{A_\alpha : K'_\alpha}, \pi^{\alpha 0}_{\beta 0}); \\ \Delta^r_{G:K} = \Delta^r_G - \Delta^r_{GK} = \varprojlim (\Delta^r_{G_\alpha : K_\alpha}, \tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}), \end{array}\right\}$$

после чего, на основании леммы [23.2] и формулы (12.4), имеем

$$(25.4)\quad (\mathrm{I}^K_A)^{-1}\, 0_K = \varinjlim (\nabla^r_{K_\alpha G_\alpha}, \pi^\alpha_\beta) = \nabla^r_{KG};\ (\mathrm{I}^K_G)^{-1}\, 0_G = \varprojlim (\Delta^r_{K_\alpha A_\alpha}, \tilde{\omega}^\beta_\alpha) = \Delta^r_{KA}.$$

Из этих формул так же, как в п. 14, следуют соотношения (14.1), (14.2) для спектров K, A, G. Остается доказать основной закон двойственности [14.3] или, что то же, третью пару изоморфизмов (14.3′). Это будет сделано в п. 27.

26. Прямое определение групп фигуры K, A, G. Так как каждый Δ-цикл и каждая Δ-гомология на A_α являются Δ-циклом и Δ-гомологией на K_α, то каждой нити $\mathfrak{z}^r_A = \{\bar{\mathfrak{z}}^r_{\alpha 0}\} \in \Delta^r_A$ однозначно соответствует нить $\mathfrak{z}_K{}^r = \{\bar{\mathfrak{z}}_\alpha{}^r\} \in \Delta^r_K$, вполне определенная условием $\bar{\mathfrak{z}}_{\alpha 0}{}^r \subseteq \bar{\mathfrak{z}}_\alpha{}^r$. Эта нить $\mathfrak{z}_K{}^r$ и есть нить $E^A_K \mathfrak{z}_A{}^r$.

С другой стороны, каждый ∇-цикл и каждая ∇-гомология на G_α являются ∇-циклом и ∇-гомологией на K_α, поэтому каждый ∇-класс $\mathfrak{z}^r_G \in \nabla^r_G$ есть подмножество вполне определенного ∇-класса $\mathfrak{z}^r_K \ni \nabla^r_K$ и $\bar{\mathfrak{z}}^r_K = E^G_K\, \mathfrak{z}^r_G$.

Пусть $\bar{\mathfrak{z}}_K{}^r = \{\bar{\mathfrak{z}}_\alpha{}^r\} \in \Delta^r_K$. Тогда $\{\mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} \bar{\mathfrak{z}}^r_\alpha\}$ есть нить. и эта нить и представляет собой элемент $\mathbf{I}^K_G \bar{\mathfrak{z}}^r_K$ группы Δ^r_G.

Пусть $\mathfrak{z}^r_K = \{z^r_\alpha\} \in \nabla^r_K$. Тогда все $\mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} z^r_\alpha$ являются элементами одного и того же ∇-класса $\mathfrak{z}^r_A = \mathbf{I}^K_\alpha\, \mathfrak{z}^r_K$.

Теперь мы можем дать определению групп фигуры K, A, G следующую простую форму:

Элементы группы Δ^r_{KA} суть нити $\bar{\mathfrak{z}}_K{}^r = \{\mathfrak{z}^r_\alpha\} \in \Delta^r_K$, «содержащие» нити $\bar{\mathfrak{z}}_A{}^r = \{\bar{\mathfrak{z}}^r_{\alpha 0}\} \in \Delta^r_A$ в том смысле, что $\mathfrak{z}^r_{\alpha 0} \subseteq \bar{\mathfrak{z}}^r_\alpha$ для любого α.

Элементы группы $\nabla^r_{KG} \subseteq \nabla^r_K$ суть ∇-классы $\mathfrak{z}^r_K = \{z^r_\alpha\} \in \nabla^r_K$, содержащие в качестве подмножеств ∇-классы $\mathfrak{z}^r_G = \{z^r_{\alpha 1}\} \in \nabla^r_G$.

Элементы группы $\nabla^r_{AK} \subseteq \nabla^r_A$ суть ∇-классы $\mathfrak{z}^r_A$, содержащие в числе своих элементов продолжаемые ∇-циклы, т. е. ∇-циклы $z^r_{\alpha 0}$ вида $z^r_{\alpha 0} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 0} z^r_\alpha$, где z^r_α есть ∇-цикл комплекса K_α; для каждого ∇-цикла $z^r_{\alpha 0} \in \bar{\mathfrak{z}}^r_A \in \nabla^r_{AK}$ найдется такое $\beta > \alpha$, что $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^r_{\alpha 0}$ есть продолжаемый ∇-цикл комплекса A_β.

Элементы группы $\nabla^r_{GK} \subseteq \Delta^r_G$ суть «продолжаемые нити» $\bar{\mathfrak{z}}^r_G \in \Delta^r_G$, т. е. нити $\bar{\mathfrak{z}}^r_G = \{\bar{\mathfrak{z}}^r_{\alpha 1}\}$, элементы которых суть продолжаемые Δ-классы вида $\bar{\mathfrak{z}}^r_{\alpha 1} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} \bar{\mathfrak{z}}^r_\alpha$, $\mathfrak{z}^r_\alpha \in \Delta^r_\alpha$.

Элементы группы $\Delta^r_{A:K}$ суть нити $\mathfrak{z}^r_A = \{\mathfrak{z}^r_{\alpha 0}\}$, ограничивающие на K, в том смысле. что элементы каждого Δ-класса $\mathfrak{z}^r_{\alpha 0}$ суть циклы, ограничивающие на K_α.

Элементы группы $\Delta^r_{G:K}$ суть ∇-классы, ограничивающие на K, т. е. являющиеся подмножествами нулевого ∇-класса $\mathfrak{z}^r_K = 0 \in \nabla^r_K$. Другими словами, для каждого $z^r_{\alpha 1} \in \mathfrak{z}^r_G \in \nabla^r_{G:K}$ найдется $\pi^{\alpha 1}_{\beta 1} z^r_{\alpha 1}$, ограничивающий на K_β.

Для определения групп $\Delta^r_{G:K}$ и $\nabla^r_{A:K}$ скажем, что две нити $\mathfrak{z}^r_G = \{\mathfrak{z}^r_{\alpha 1}\}$ и $\mathfrak{z}'^r_G = \{\mathfrak{z}'^r_{\alpha 1}\}$ принадлежат тому же $K\Delta$-классу, если для каждого α разность $\mathfrak{z}^r_{\alpha 1} - \mathfrak{z}'^r_{\alpha 1}$ имеет вид $\mathfrak{z}^r_{\alpha 1} - \mathfrak{z}'^r_{\alpha 1} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha 1} \mathfrak{z}^r_\alpha$, где $\mathfrak{z}^r_\alpha \in \Delta^r_\alpha$. С другой стороны, скажем, что два ∇-цикла $z^r_{\alpha 0}$ и $z^r_{\beta 0}$ комплексов A_α и A_β принадлежат тому же K_∇-классу, если для некоторого $\gamma > \alpha, \beta$ оказывается, что ∇-цикл $\pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^r_{\alpha 0} - \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^r_{\beta 0}$ комплекса A_γ продолжаем.

После этого можем сказать: элементы группы $\Delta^r_{G:K}$ суть K_Δ-классы нитей $\mathfrak{z}^r_G$, а элементы группы $\nabla^r_{A:K}$ суть K_∇-классы Δ-циклов $z^r_{\alpha 0}$

27. Доказательство третьей пары изоморфизмов (14.3′). Пусть $z^r_A = \{z^r_{\alpha 0}\} \in \nabla^r_{A:K}$ — произвольный K_∇-класс. Тогда $\nabla E^{\alpha 0}_\alpha z^r_{\alpha 0}$ есть ∇-цикл комплекса G_α, ограничивающий на K_α. Для доказательства того, что опера-

торы $\nabla E_{\alpha}^{\alpha 0}$, воздействующие на соответствующие $z_{\alpha 0}^{r} \in z_{A}^{r}$, порождают единый гомоморфизм ∇E группы $\nabla_{A:K}^{r}$ в $\nabla_{G:K}^{r+1}$, достаточно убедиться в следующем:

[27.1]. *Если $z_{\alpha 0}^{r}$ и $z_{\beta 0}^{r}$ принадлежат тому же K_{∇}-классу т. е. если для некоторого $\gamma > \alpha$, β имеем*

$$\pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - \pi_{\gamma 0}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r} = \mathbf{I}_{\gamma 0}^{\gamma} z_{\gamma}^{r}, \tag{27.11}$$

где z_{γ}^{r} есть ∇-цикл на K_{γ}, то

$$\pi_{\gamma}^{\alpha} \nabla E_{\alpha}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - \pi_{\gamma}^{\beta} \nabla E_{\beta}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r} \in H_{\gamma 1}^{r}. \tag{27.12}$$

(мы помним, что $H_{\gamma 1}$ есть группа r-мерных ∇-циклов комплекса G_{γ}, ограничивающих на G_{γ}).

Для доказательства этого утверждения заметим, что в силу результатов п. 15 из (27.11) следует, что

$$\nabla E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - \nabla E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r} \in H_{\gamma 1}^{r}. \tag{27.13}$$

С другой стороны

$$\pi_{\gamma}^{\alpha} \nabla E_{\alpha}^{\alpha 0} - \nabla E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} = \nabla (\pi_{\gamma}^{\alpha} E_{\alpha}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r}),$$

и $\pi_{\gamma}^{\alpha} E_{\alpha}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r}$ есть цепь комплекса G_{γ}. Поэтому

$$\pi_{\gamma}^{\alpha} \nabla E_{\alpha}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} - \nabla E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} \in H_{\gamma 1}^{r}. \tag{27.14}$$

Аналогично

$$\pi_{\gamma}^{\beta} \nabla E_{\beta}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r} - \nabla E_{\gamma}^{\gamma 0} \pi_{\gamma 0}^{\beta 0} z_{\gamma 0}^{r} \in H_{\gamma 1}^{r}. \tag{27.15}$$

Из (27.13) — (27.15) следует (27.12) и, значит, [27.1].

[27.2]. *Гомоморфизм ∇E отображает $\nabla_{A:K}^{r}$ на $\nabla_{G:K}^{r+1}$.* Для доказательства пусть $z_{G}^{r+1} \in \nabla_{G:K}^{r+1}$, $z_{\alpha 1}^{r+1} \in z_{G}^{r+1}$. Мы ищем такой ∇-цикл $z_{\beta 0}^{r}$ некоторого комплекса A_{β}, $\beta \geqslant \alpha$, для которого

$$\nabla E_{\beta}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r} - \pi_{\beta}^{\alpha} z_{\alpha 1}^{r+1} \in H_{\beta 1}^{r}. \tag{27.21}$$

Так как $z_{\alpha 1}^{r+1} \in z_{G}^{r+1} \in \nabla_{G:K}^{r+1}$, то по определению группы $\nabla_{G:K}^{r+1}$ существует $\beta > \alpha$ и цепь x_{β}^{r} комплекса K, ограниченная ∇-циклом $\pi_{\beta}^{\alpha} z_{\alpha 1}^{r+1}$. Так как $\Delta x_{\beta}^{r} = \pi_{\beta}^{\alpha} z_{\alpha 1}^{r+1}$ есть цепь комплекса G_{β}, то $\mathbf{I}_{\beta 0}^{\beta} x_{\beta}^{r} = z_{\beta 0}^{r}$ есть ∇-цикл на A_{β}, тогда как $x_{\beta}^{r} - E_{\beta}^{\beta 0} \mathbf{I}_{\beta 0}^{\beta} x^{r}$ есть цепь комплекса G_{β} и

$$\nabla (x_{\beta}^{r} - E_{\beta}^{\beta 0} \mathbf{I}_{\beta 0}^{\beta} x_{\beta}^{r}) = \nabla x_{\beta}^{r} - \nabla E_{\beta}^{\beta 0} \mathbf{I}_{\beta 0}^{\beta} x_{\beta}^{r} = \pi_{\beta}^{\alpha} z_{\alpha 1}^{r+1} - \nabla E_{\beta}^{\beta 0} z_{\beta 0}^{r}.$$

откуда следует (27.21), и значит, [27.2].

[27.3]. *Гомоморфное отображение ∇E группы $\nabla_{A:K}^{r}$ на $\nabla_{G:K}^{r+1}$ представляет собой изоморфизм.* Для доказательства предположим, что элемент z_{A}^{r} группы $\nabla_{A:K}^{r}$ отображен посредством ∇E на нулевой элемент группы $\nabla_{G:K}^{r+1}$. Требуется доказать, что z_{A}^{r} есть нулевой элемент группы $\nabla_{A:K}^{r}$. Возьмем $z_{\alpha 0}^{r} \in z_{A}^{r}$. По предположению существует такое $\beta > \alpha$, что

$$\pi_{\beta}^{\alpha} \nabla E_{\alpha}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^{r} \in H_{\beta 1}^{r}.$$

Так как

$$\pi^{\alpha}_{\beta} \nabla E^{\alpha 0}_{\alpha} z^{r}_{\alpha 0} - \nabla E^{\beta 0}_{\beta} \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^{r}_{\alpha 0} \in H^{r}_{\beta 1}$$

[см. (27.14)] и $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^{r}_{\alpha 0} \in z^{r}_{A}$, мы можем предположить с самого начала, заменяя β через α и $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^{r}_{\alpha 0}$ через $z^{\alpha}_{\beta 0}$, что для некоторого $z^{r}_{\alpha 0} \in z^{r}_{A}$ имеем $\nabla E^{\alpha 0}_{\alpha} z^{r}_{\alpha 0} \in H^{r}_{\alpha 1}$. Для того, чтобы вывести отсюда нужное нам тождество $z^{r}_{A} = 0$, достаточно доказать, что $z^{r}_{\alpha 0}$ есть продолжаемый ∇-цикл. Для достижения этой последней цели берем цепь $x^{r}_{\alpha 1}$ комплекса G_{α}, ограниченную ∇-циклом $\nabla E^{\alpha 0}_{\alpha} z^{r}_{\alpha 0}$. Тогда $z^{r}_{\alpha} = E^{\alpha 0}_{\alpha} z^{r}_{\alpha 0} - x^{r}_{\alpha 1}$ есть ∇-цикл на K_{α}, и $\mathrm{I}^{\alpha}_{\alpha 0} z^{r}_{\alpha} = z^{r}_{\alpha 0}$, что и требовалось доказать.

§ 7. Симплициальные спектры

28. **Нервы.** Мы обозначаем через N, N_{α} и т. д. и называем н е р в а м и конечные полные симплициальные комплексы (полнота означает, что каждая грань какого-либо симплекса из N сама есть симплекс комплекса N). Ориентированные симплексы нерва образуют клеточный комплекс, который обозначаем также через N.

Пусть даны нервы N_{α}, N_{β} и в них соответственно замкнутые подкомплексы C_{α}, C_{β}. Положим $K_{\alpha} = N_{\alpha} \setminus C_{\alpha}$; $K_{\beta} = N_{\beta} \setminus C_{\beta}$. Пусть σ^{β}_{α} симплициальное отображение N_{β} в N_{α}, *отображающее* C_{β} в C_{α}.

Ставя в соответствие каждому ориентированному симплексу $t^{r}_{\beta} = (e_{\beta 0} \ldots e_{\beta r})$ комплекса N_{β} ориентированный симплекс $\sigma^{\beta}_{\alpha} t^{r}_{\beta} = (\sigma^{\beta}_{\alpha} e_{\beta 0} \ldots \sigma^{\beta}_{\alpha} e_{\beta r})$, если все вершины $\sigma^{\beta}_{\alpha} e_{\beta i}$ попарно различны, и полагая $\sigma^{\beta}_{\alpha} t^{r}_{\beta} = 0$, если среди $\sigma^{\beta}_{\alpha} e_{\beta i}$ имеется хотя бы одна пара совпадающих вершин, получаем гомоморфизм σ^{β}_{α} группы $L^{r}_{N_{\beta}}$ и $L^{r}_{N_{\alpha}}$, ставящий в соответствие каждой цепи $x^{r}_{\beta} = \sum a_i t^{r}_{\beta i}$ комплекса N_{β} цепь $\sigma^{\beta}_{\alpha} x^{r}_{\beta} = \sum a_i \sigma^{\beta}_{\alpha} t^{r}_{\beta i}$ комплекса N_{α}. Так как гомоморфизмы σ^{β}_{α} коммутируют с оператором Δ, то они образуют проекцию клеточного комплекса N_{β} в клеточный комплекс N_{α}, которую будем обозначать также через σ^{β}_{α}. Проекция σ^{β}_{α} комплекса N_{β} в N_{α} порождает проекцию $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ комплекса K_{β} в K_{α} по формуле $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha} x^{r}_{\beta} = \mathrm{I}^{N_{\alpha}}_{K_{\alpha}} \sigma^{\beta}_{\alpha} x^{r}_{\beta}$ для любого $x^{r}_{\beta} \in L^{r}_{\beta} = L^{r}_{K_{\beta}}$ (см. п. 20, в котором K_{α}, G_{α}, $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$, $\tilde{\omega}^{\beta 1}_{\alpha 1}$ надо заменить соответственно через N_{α}, K_{α}, σ^{β}_{α}, $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$).

Известна следующая лемма:

[28.1]. *Пусть σ^{β}_{α} и σ'^{β}_{α} два симплициальных отображения нерва N_{β} в нерв N_{α}, отображающие C_{β} в C_{α} и удовлетворяющие условию:*

[28.11]. *Для каждого симплекса $T_{\beta} \in N_{\beta}$ существует симплекс $T_{\alpha} \in N_{\alpha}$, содержащий в числе своих вершин все вершины обоих симплексов $\sigma^{\beta}_{\alpha} T_{\beta}$ и $\sigma'^{\beta}_{\alpha} T_{\beta}$, причем если $T_{\beta} \in C_{\beta}$, то симплекс T_{α} может быть взят среди симплексов C_{α}.*

В этих предположениях проекции $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ и $\tilde{\omega}'^{\beta}_{\alpha}$ комплекса K_{β} в K_{α}, порожденные отображениями σ^{β}_{α} и σ'^{β}_{α}, гомологичны между собою.

Наметим доказательство этой леммы. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_s$ — все вершины N_β, занумерованные раз навсегда в определенном порядке. Возьмем второй экземпляр N'_β нерва N_β с вершинами $e'_1, e'_2, \ldots, e'_s$. Определим «абстрактные симплексы» (остовы) вида $|e'_{i_0} \ldots e'_{i_p} e_{i_p} \ldots e_{i_r}|$, $p = 0, 1, \ldots, r$, для всех симплексов $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in N_\beta$. Только что определенные абстрактные симплексы и их грани образуют нерв N''_β, называемый **призмой с основаниями** N_β и N'_β (призма эта зависит от выбранной нумерации вершин e_i). Для каждого ориентированного симплекса $t^r_\beta = (e_{i_0} \ldots e_{i_r}) \in N^r_\beta$ **назовем призмой над** t^r_β цепь

$$\Pi t^r_\beta = \sum_p (-1)^p (e'_{i_0} \ldots e'_{i_p} e_{i_p} \ldots e_{i_r}) \in L^{r+1}_{N''_\beta}.$$

После этого **призмой над цепью** $x^r_\beta = \sum a_i t^r_{\beta i}$ комплекса N_β назовем цепь

$$\Pi x^r_\beta = \sum a_i \Pi t^r_{\beta i}$$

комплекса N''_β. Легко вычисляется: *если z^r_β есть Δ-цикл комплекса K^β_β, то*

(28.12) $$\Delta \Pi z^r_\beta = z^r_\beta - z'^r_\beta - \Pi \Delta z^r_\beta,$$

где z'^r_β есть цепь комплекса N'_β, соответствующая цепи z^r_β, и оператор Δ рассматривается слева на N''_β, а справа на N_β [см. ([4]), стр. 199].

Воздействуем теперь на вершины N_β отображением σ^β_α, а на вершины N'_β отображением σ'^β_α. В силу условия [28.11] возникнет симплициальное отображение σ''^β_α призмы N''_β в N_α. Обозначая через x^{r+1}_α и x^r_α цепи $\sigma''^\beta_\alpha \Pi z^r_\beta$ и $\sigma''^\beta_\alpha \Pi \Delta z^r_\beta$, из которых первая есть цепь комплекса N''_β, а вторая — цепь комплекса C_α, получим

$$\Delta_{N_\alpha} x^{r+1}_\alpha = \sigma^\beta_\alpha z^r_\beta - \sigma'^\beta_\alpha z^r_\beta - x^r_\alpha$$

и, так как K_α открыто в N_α,

$$\Delta_{K_0} \mathbf{I}^{N_\alpha}_{K_\alpha} x^{r+1}_\alpha = \mathbf{I}^{N_\alpha}_{K_\alpha} \Delta_{N_\alpha} x^{r+1}_\alpha = \mathbf{I}^{N_\alpha}_{K_\alpha} \sigma^\beta_\alpha z^r_\beta - \mathbf{I}^{N_\alpha}_{K_\alpha} \sigma'^\beta_\alpha z^r_\beta = \tilde\omega^\beta_\alpha z^r_\beta - \tilde\omega'^\beta_\alpha z^r_\beta,$$

что и требовалось доказать.

В следующей главе (п. 31) нам понадобится следствие из только что доказанной леммы.

[28.2]. *Пусть в нервах N_β, N_α, кроме замкнутых подкомплексов C_α, C_β даны еще замкнутые подкомплексы A_α и A_β комплексов $K_\alpha = N_\alpha \setminus C_\alpha$ и $K_\beta = N_\beta \setminus C_\beta$. Предположим, что даны симплициальные отображения σ^β_α и σ'^β_α нерва N_β в N_α, отображающие не только C_β в C_α, но и A_β в A_α. Условие [28.11] предполагаем выполненным в усиленном виде, а именно предполагаем, что для $T_\beta \in C_\beta$, $T_\beta \in A$ симплекс T_α, упоминаемый в [28.11], может быть взят соответственно в C_α и A_α. Тогда гомологичны между собою не только проекции $\tilde\omega^\beta_\alpha$ и $\tilde\omega'^\beta_\alpha$ комплекса K_β в K_α, но и порожденные этими проекциями проекции $\tilde\omega^{\beta 0}_{\alpha 0}$, $\tilde\omega'^{\beta 0}_{\alpha 0}$ комплекса A_β в A_α, а также проекции $\tilde\omega^{\beta 1}_{\alpha 1}$, $\tilde\omega'^{\beta 1}_{\alpha 1}$ комплекса G_β в G_α.*

Для доказательства утверждения, касающегося A_β, A_α, достаточно заменить в [28.1] комплексы N_β, N_α через $A_\beta \cup C_\beta$, $A_\alpha \cup C_\alpha$, и K_β, K_α через A_β, A_α. Для доказательства утверждения, касающегося G_β, G_α,

надо заменить в [28.1] соответственно C_β, C_α через $A_\beta \cup C_\beta$, $A_\alpha \cup C_\alpha$ и K_β, K_α через G_β, G_α.

29. Симплициальные спектры. Пусть дано неограниченное частично упорядоченное множество нервов N_α (как всегда, мы пишем $\beta > \alpha$, если в этом множестве N_β следует за N_α). В каждом N_α дан замкнутый подкомплекс C_α. Предположим, что для каждой пары $\beta > \alpha$ дано конечное число симплициальных отображений σ_α^β (называемых проекциями) N_β в N_α, отображающих C_β в C_α, удовлетворяющих условию [28.11] (для любых двух σ_α^β и $\sigma_\alpha'^\beta$) и удовлетворяющих, наконец, еще следующему *условию транзитивности*:

[29.1]. Если $\gamma > \beta > \alpha$ и σ_β^γ, σ_α^β суть проекции, то симплициальное отображение $\sigma_\alpha^\beta \sigma_\beta^\gamma$ комплекса N_γ в N_α также есть проекция.

В этих условиях частично упорядоченное множество нервов N_α, подкомплексов C_α и проекций σ_α^β называется симплициальным спектром $N = \{N_\alpha, C_\alpha, \sigma_\alpha^\beta\}$; комплексы C_α называются особыми подкомплексами в спектре N.

Симплициальный спектр $N = \{N_\alpha, C_\alpha, \sigma_\alpha^\beta\}$ порождает в соответствии с п. 28 клеточный спектр

$$K = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$$

симплициального спектра N, где K_α есть клеточный комплекс всех ориентированных симплексов комплекса $N_\alpha \setminus C_\alpha$ и проекции ω_α^β определены, как в п. 28, формулами $\tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\alpha^r = \mathrm{I}_{K_\alpha}^{N_\alpha} \sigma_\alpha^\beta x_\beta^r$ для любого $x_\beta^r \in L_\beta^r = L_{K_\beta}^r$.

Замечание 1. Мы не предвидим недоразумений от того, что N_α, K_α обозначают то самые симплициальные комплексы, то клеточные комплексы их ориентированных симплексов.

Замечание 2. Особенно важен случай, когда все $C_\alpha = 0$; соответствующие спектры называются бикомпактными.

ГЛАВА III. ПРОСТРАНСТВА

§ 8. Клеточный спектр и группы Бетти локально бикомпактного пространства

30. Симплициальный и клеточный спектр локально бикомпактного пространства. Нерв N называется нервом системы множеств $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$, если его вершины a_i находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами A_i системы α, причем вершины $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$ тогда и только тогда образуют остов некоторого симплекса N, когда соответствующие им множества $A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}$ имеют непустое пересечение*.

---

* Каждый нерв N является нервом какой-нибудь системы множеств, например, нервом системы открытых звезд вершин комплекса N.

Пусть **K** — локально бикомпактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим систему всех конечных открытых (т. е. составленных из конечного числа открытых множеств) покрытий

$$\alpha = \{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha s_\alpha}\}$$

пространства **K**. Нерв покрытия α обозначаем через N_α; вершину N_α, соответствующую множеству $o_{\alpha i} \in \alpha$ обозначаем через $e_{\alpha i}$. Обозначаем через C_α (замкнутый) подкомплекс комплекса N_α, состоящий из всех симплексов $T_\alpha \in N_\alpha$, обладающий следующим свойством: все вершины симплекса T_α соответствуют множествам $o_{\alpha i} \in \alpha$, замыкания которых в **K** не бикомпактны. Таким образом, открытый подкомплекс $K_\alpha = N_\alpha \setminus C_\alpha$ состоит из тех симплексов N_α, у которых имеется хотя бы одна вершина, соответствующая множеству $o_{\alpha i} \in \alpha$ с бикомпактным замыканием. Покрытие** β называется *вписанным* в α, если каждый элемент β содержится в некотором элементе покрытия α. Мы пишем $\beta > \alpha$ если β вписано в α, но в то же время α не вписано в β. Таким образом, множество всех покрытий α, а следовательно и множество всех нервов N_α оказывается частично упорядоченным.

Пусть $\beta > \alpha$. Каждой вершине $e_{\beta j}$ нерва N_β ставим в соответствие какую-либо из вершин $e_{\alpha i}$ нерва N_α, выбранную при условии, что $o_{\beta j}$ содержится в $o_{\alpha i}$. Полученное таким образом отображение вершин определяет симплициальное отображение N_β в N_α, и всякое симплициальное отображение N_β в N_α, построенное таким образом, обозначается через σ_α^β и называется проекцией N_β в N_α. Легко видеть, что нервы N_α с их подкомплексами C_α и проекциями σ_α^β образуют симплициальный спектр $N = \{N_\alpha, C_\alpha, \sigma_\alpha^\beta\}$; этот спектр называется *симплициальным спектром локально бикомпактного пространства* **K**.

Как сказано в п. 29, симплициальный спектр $N = \{N_\alpha, C_\alpha, \sigma_\alpha^\beta\}$ определяет клеточный спектр

$$K = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}; \tag{30.1}$$

этот клеточный спектр называется *клеточным спектром пространства* **K**, а его группы Бетти называются группами Бетти пространства **K** и поэтому обозначаются через $\Delta_{\mathbf{K}}^r$, $\nabla_{\mathbf{K}}^r$:

$$\Delta_{\mathbf{K}}^r = \Delta_K^r, \ \nabla_{\mathbf{K}}^r = \nabla_K^r.$$

Если **K** бикомпактно, то все $C_\alpha = 0$, и спектр N бикомпактен; тогда $K_\alpha = N_\alpha$, и последующие рассуждения от этого упрощаются.

31. Фигуры K, A, Г и K, A, G. Сохраняем обозначения предыдущего пункта и предположим, что в **K** дано замкнутое множество **A**. Дополнительное открытое множество **K** $\setminus$ **A** обозначаем через **Г**.

Обозначаем через A_α замкнутый подкомплекс комплекса K_α, состоящий из всех симплексов $T_\alpha \in K_\alpha$, удовлетворяющих условию: какова

** Под «покрытием» без каких-либо специальных оговорок мы понимаем всегда конечное открытое покрытие.

бы ни была вершина $e_{\alpha i}$ симплекса T_α, соответствующее множество $o_{\alpha i}$ пересекается с **A**. Как всегда, полагаем $G_\alpha = K_\alpha \setminus A_\alpha$. Легко проверить, что проекции c_α^β нерва N_β в N_α удовлетворяют условиям [28.2] и таким образом, в добавление к клеточному спектру (30), определяют клеточные спектры

$$A = \{A_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0}\} \tag{31.1}$$

и

$$G = \{G_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha 1}^{\beta 1}\}. \tag{31.2}$$

По самому определению, группы Δ_K^r и ∇_K^r тождественны с $\Delta_\mathbf{K}^r, \nabla_\mathbf{K}^r$.

Мы увидим в следующем параграфе, что существуют определенные «естественные» изоморфизмы между группами

$$\Delta_\mathbf{A}^r \text{ и } \Delta_A^r; \quad \Delta_\Gamma^r \text{ и } \Delta_G^r;$$
$$\nabla_\mathbf{A}^r \text{ и } \nabla_A^r; \quad \nabla_\Gamma^r \text{ и } \nabla_G^r.$$

Эти изоморфизмы трансформируют гомоморфизмы вложения и высечения $E_K^A, E_K^G, \mathbf{I}_A^K, \mathbf{I}_G^K$, связывающие группы Δ_K^r, ∇_K^r с $\Delta_A^r, \nabla_A^r, \Delta_G^r, \nabla_G^r$ в гомоморфизмы $E_\mathbf{K}^\mathbf{A}, E_\mathbf{K}^\Gamma, \mathbf{I}_\mathbf{A}^\mathbf{K}, \mathbf{I}_\Gamma^\mathbf{K}$, связывающие $\Delta_\mathbf{K}^r, \nabla_\mathbf{K}^r$ с $\Delta_\mathbf{A}, \nabla_\mathbf{A}^r, \Delta_\Gamma^r, \nabla_\Gamma^r$, и приводящие таким образом к определению «г р у п п ф и г у р ы **K, A, Г**», т. е. групп $\Delta_{\mathbf{KA}}^r, \nabla_{\mathbf{K}\Gamma}^r, \Delta_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}^r$ и т. д. После этого останется доказать, что эти группы удовлетворяют соотношениям (14.1)—(14.3′) с естественной заменой в этих соотношениях K, A, G через **K, A, Г**.

§ 9. Естественные изоморфизмы. Группы и гомоморфизмы фигуры K, A, Г

32. Специальные типы покрытий. Как уже было сказано, под покрытием без каких-либо дополнительных оговорок мы понимаем конечное покрытие (нормального локально бикомпактного пространства **K**). Во всяком покрытии $\alpha = \{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha s}\}$ мы обозначаем через $o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha p}$ и называем э л е м е н т а м и п е р в о г о р о д а те элементы, которые пересекаются с **A**. Остальные элементы (т. е. $o_{\alpha, p+1}, \ldots, o_{\alpha s}$) называются э л е м е н т а м и в т о р о г о р о д а. Среди элементов второго рода мы различаем г р а н и ч н ы е э л е м е н т ы, замыкания которых пересекаются с **A**, и в н у т р е н н и е (с замыканиями, лежащими в **Г**).

Покрытие $\{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha p}, \ldots, o_{\alpha s}\}$ называется к о г р е д и е н т н ы м с **A**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1°. Все множества $\mathbf{A} \cap o_{\alpha 1}, \ldots, \mathbf{A} \cap o_{\alpha p}$ попарно различны между собою.

2°. Если $o_{\alpha i} \cap \ldots \cap o_{\alpha i_r} \neq 0$ и $i_0, \ldots, i_r \leqslant p$, то и $(\mathbf{A} \cap o_{i_0}) \cap \ldots \cap (\mathbf{A} \cap o_{\alpha i_r}) \neq 0$.

3°. Если $i \leqslant p$ и $\mathbf{A} \cap \overline{o}_{\alpha i}$ бикомпактно, то и $\overline{o}_{\alpha i}$ бикомпактно.

Пусть $\alpha = \{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha p}, \ldots, o_{\alpha s}\}$ — покрытие. Обозначим через Φ сумму тех множеств $\overline{o}_{\alpha i}$, которые бикомпактны и кроме того лежат в **Г**.

Покрытие α называется когредиентным с Γ, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1°. Элементы второго ряда покрытия α образуют покрытие множества Γ, обозначенное через $\Gamma_\alpha = \{o_{\alpha, p+1}, \ldots, o_{\alpha s}\}$.

2°. Ни один из элементов первого рода не пересекается с Φ.

Замечание. В моей работе ([1]) покрытия, когредиентные с Γ, назывались правильными по отношению к Γ.

Наконец, покрытие $\alpha = \{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha s}\}$ называется правильным (в терминологии ([1]) правильным по отношению к A), если:

1°. α не содержит граничных элементов второго рода,

2°. Если $i_0, \ldots, i_r \leqslant p$ и $A \cap o_{\alpha i_0} \cap \ldots \cap o_{\alpha i_r} = 0$, то и $\bar{o}_{\alpha i_0} \cap \ldots \cap o_{\alpha i} = 0$.

Чтобы закончить эти предварительные замечания, обозначим через A'_α подкомплекс комплекса K_α, состоящий из всех симплексов $T_\alpha \in K_\alpha$, обладающих свойством: какова бы ни была вершина T_α, соответствующий ей элемент покрытия α есть либо элемент первого рода, либо граничный элемент второго рода. Очевидно A'_α есть замкнутый подкомплекс K_α и $A'_\alpha \supseteq A_\alpha$.

Если $\beta > \alpha$, то всякая проекция σ^β_α отображеат A'_β в A'_α, так что мы имеем клеточный спектр $A' = \{A'_\alpha, \tilde{\omega}'^{\beta 0}_{\alpha 0}\}$ и более важный для нас клеточный спектр

$$(32.1) \qquad G' = \{G'_\alpha, \tilde{\omega}'^{\beta 1}_{\alpha 1}\},$$

где $G'_\alpha = K_\alpha \setminus A'_\alpha$ и $\tilde{\omega}'^{\beta 0}_{\alpha 0}$; $\tilde{\omega}'^{\beta 1}_{\alpha 1}$ суть проекции клеточного комплекса A'_β в A'_α и клеточного комплекса G'_β в G'_α, порожденные симплициальными отображениями σ^β_α.

Очевидно:

[32.2]. Если α — правильное покрытие, то $A'_\alpha = A_\alpha$, $G'_\alpha = G_\alpha$.

Следующие предложения доказаны в ([1]).

[32.3]. За всяким покрытием следует правильное покрытие (см. ([1]), стр. 38, теорема [6.22]).

[32.4]. За всяким покрытием следует покрытие, когредиентное с Γ и даже более того:

[32.5]. За всякими двумя покрытиями α, β, следует покрытие γ, когредиентное с Γ и такое, что каждый элемент второго рода покрытия γ содержится по крайней мере в одном элементе второго рода покрытия α и по крайней мере в одном элементе второго рода покрытия β. (См. ([2]) стр. 46, лемма [8.5]).

[32.6]. Для каждого покрытия α_Γ множества Γ можно найти такое покрытие α пространства K, когредиентное с Γ, что $\Gamma\alpha = \alpha_\Gamma$. (См. ([1]), стр. 44, теорема [8.33]).

Докажем теперь

[32.7]. За всяким покрытием $\alpha = \{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha p}, \ldots, o_{\alpha s}\}$ следует покрытие, когредиентное с A.

Пусть

$$A \cap o_{\alpha 1}, \ldots, A \cap o_{\alpha q}, \quad q \leqslant p$$

выбраны среди $A \cap o_{\alpha 1}, \ldots, A \cap o_{\alpha p}$ таким образом, что никакая собственная подсистема системы (32.7) не образует покрытия множества A. Строим замкнутые множества $a_i \subseteq A \cap o_{\alpha i}$, $i = 1, 2, \ldots, q$ так, чтобы они покрывали все множество A. После этого выбираем окрестности $Oa_i \subseteq o_{\alpha i}$ множества a_i, соблюдая следующие условия:

1°. все Oa_i попарно различны;

2°. если $Oa_{i_0} \cap \ldots \cap Oa_{i_r} \neq 0$, то и $a_{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_r} \neq 0$;

3°. если a_i бикомпактно, то и Oa_i бикомпактно.

Сумма всех Qa_i образует окрестность OA множества A. Берем замкнутые множества $b_h \subset K \setminus OA$ так, чтобы получилось замкнутое покрытие $\{b_1, \ldots, b_a\}$ множества $K \setminus OA$, вписанное в α. После этого, если $b_h \subseteq o_{\alpha i}$, берем окрестность $Ob_h \subseteq o_{\alpha i} \cap (K \setminus A)$. Покрытие $Oa_1, \ldots, Oa_q, Ob_1, \ldots, Ob_u$ следует за α и когредиентно с A, что и требовалось доказать.

Пусть α — покрытие K, а α_A — покрытие A. Если, ставя в соответствие каждому элементу первого рода покрытия α его пересечение с A, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством элементов первого рода покрытия α и покрытием α_A, то пишем $\alpha_A = A\alpha$.

Из [32.7] следует

[32.8]. Сохраняя среди покрытий множества A лишь покрытия вида $\alpha_A = A\alpha$, где α — покрытие K, когредиентное с A, и полагая для таких покрытий $A\beta > A\alpha$, если только $\beta > \alpha$, получим конфинальную часть множества всех покрытий множества A.

33. Лемма о системах гомоморфизмов. Пусть даны две системы гомоморфизмов:

$$\text{обратные } \{\overline{U}_{\alpha\lambda}, \tilde{\omega}_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}\} \text{ и } \{\overline{U}_{\alpha}, \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}\}; \text{ (прямые } \{U_{\alpha\lambda}, \pi_{\beta\mu}^{\alpha\lambda}\} \text{ и } \{U_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}\}),$$

удовлетворяющие условиям:

1°. Существует изоморфное отображение $\varphi_{\alpha}^{\alpha\lambda}$ группы $\overline{U}_{\alpha\lambda}$ на $\overline{U}_{\alpha}$; (соотв. $U_{\alpha\lambda}$ на U_{α}).

2°. Из $\beta\mu > \alpha\lambda$ следует $\beta > \alpha$.

3°. Для каждого

$$\overline{u}_{\beta\mu} \in \overline{U}_{\beta\mu}; \quad u_{\alpha\lambda} \in U_{\alpha\lambda}$$

имеем

$$\varphi_{\alpha}^{\alpha\lambda} \tilde{\omega}_{\alpha\lambda}^{\beta\mu} \overline{u}_{\beta\mu} = \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\beta}^{\beta\mu} \overline{u}_{\beta\mu}; \quad \varphi_{\beta}^{\beta\mu} \pi_{\beta\mu}^{\alpha\lambda} u_{\alpha\lambda} = \pi_{\beta}^{\alpha} \varphi_{\alpha}^{\alpha\lambda} u_{\alpha\lambda}.$$

При этих условиях, заменяя элементы каждой нити $\{\overline{u}_{\alpha\lambda}\}$, (каждого пучка $\{u_{\alpha\lambda}\}$) их образами при отображении $\varphi_{\alpha}^{\alpha\lambda}$, получим изоморфное отображение группы $\varprojlim (\overline{U}_{\alpha\lambda}, {}_{\alpha\lambda}^{\beta\mu})$ на $\varprojlim (\overline{U}_{\alpha}, \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta})$; (группы $\varinjlim (U_{\alpha\lambda}, \pi_{\beta\mu}^{\alpha\lambda})$ на $\varinjlim (U_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha})$).

Доказательство не представляет затруднений и может быть найдено в ([1]), стр. 23, теорема [3.61].

34. Естественные изоморфизмы между группами Δ^r_A, ∇^r_A и группами $\Delta^r_{\mathbf{A}}$, $\nabla^r_{\mathbf{A}}$. Мы возвращаемся к фигурам п. 31, но слегка видоизменяем на время наши обозначения. Именно, мы обозначаем теперь через α любое покрытие множества **A**, могущее быть записанным в виде $\alpha = \mathbf{A}\lambda$, где $\alpha\lambda$ — какое-нибудь покрытие **K**, когредиентное с **A** (и такое, что $\mathbf{A}\alpha\lambda = \alpha$). В соответствии с этим мы обозначаем через $N_{\alpha\lambda}$, N_α нервы $\alpha\lambda$, α, через $\sigma^{\beta\mu}_{\alpha\lambda}$ проекции $N_{\beta\mu}$ в $N_{\alpha\lambda}$, тогда как σ^β_α обозначает теперь лишь те проекции N_β в N_α, которые порождаются проекциями $\sigma^{\beta\mu}_{\alpha\lambda}$. Естественно, $K_{\alpha\lambda}$, K_α обозначают подкомплексы комплексов $N_{\alpha\lambda}$, N_α, состоящие из симплексов, имеющих хотя бы одну вершину, соответствующую элементу покрытия $\alpha\lambda$ (покрытия α) с бикомпактным замыканием. Наконец $A_{\alpha\lambda}$ есть подкомплекс комплекса $K_{\alpha\lambda}$, состоящий из симплексов, все вершины которых соответствуют элементам $\alpha\lambda$, пересекающимся с **A**.

Переход от $\alpha\lambda$ к $\alpha = \mathbf{A}\alpha\lambda$ производит изоморфное отображение* комплекса $A_{\alpha\lambda}$ на комплекс K_α и, следовательно, изоморфное отображение $\varphi^{\alpha\lambda}_\alpha$ групп $\Delta^r_{\alpha\lambda 0}$, $\nabla^r_{\alpha\lambda 0}$ (комплекса $A_{\alpha\lambda}$) на группы Δ^r_α, ∇^r_α (комплекса K_α). Изоморфизм $\varphi^{\alpha\lambda}_\alpha$ удовлетворяет условиям леммы 33 и поэтому порождает изоморфизм группы

$$\underleftarrow{\lim}\,(\Delta^r_{\alpha\lambda 0}, \tilde{\omega}^{\beta\mu 0}_{\alpha\lambda 0}) \text{ на } \underleftarrow{\lim}\,(\nabla^r_\alpha, \tilde{\omega}^\beta_\alpha); \ \underrightarrow{\lim}\,(\nabla^r_{\alpha\lambda 0}, \pi^{\alpha\lambda 0}_{\beta\mu 0}) \text{ на } \underrightarrow{\lim}\,(\Delta^r_\alpha, \pi^\alpha_\beta).$$

Так как покрытия $\alpha\lambda$ образуют конфинальную часть множества всех покрытий **K**, а покрытия α образуют конфинальную часть множества всех покрытий **A**, то мы вправе отождествить

$$\underleftarrow{\lim}\,(\Delta^r_{\alpha\lambda 0}, {}^{\beta\mu 0}_{\alpha\lambda 0}) \text{ с } \Delta^r_A; \ \underrightarrow{\lim}\,(\nabla^r_{\alpha\lambda 0}, \pi^{\alpha\lambda 0}_{\beta\mu 0}) \text{ с } \nabla^r_A;$$

$$\lim\,(\Delta^r_\alpha, \tilde{\omega}^\beta_\alpha) \text{ с } \Delta^r_A \quad \lim\,(\nabla^r_\alpha, \pi^\alpha_\beta) \text{ с } \nabla^r_{\mathbf{A}}.$$

Таким образом мы получаем естественный изомофизм $\binom{A}{\mathbf{A}}$ групп Δ^r_A, ∇^r_A на группы $\Delta^r_{\mathbf{A}}$, $\nabla^r_{\mathbf{A}}$; обратный изморфизм обозначаем через $\binom{\mathbf{A}}{A}$. Мы вернемся к этим изоморфизмам в п. 37.

35. Естественный изоморфизм между группами Δ^r_Γ, ∇^r_Γ и группами $\Delta^{r}_{G'}$, ∇^r_G. Теперь мы обозначаем через α произвольное покрытие множества Γ, через $\alpha\lambda$ — произвольное покрытие **K**, когредиентное с Γ и удовлетворяющее условию $\Gamma\alpha\lambda = \alpha$. Смысл обозначений $N_{\alpha\lambda}$, N_α, $K_{\alpha\lambda}$, K_α очевиден. Мы сохраняем среди неравенств $\beta\mu > \alpha\lambda$ лишь такие, для которых существует проекция $\sigma^{\beta\mu}_{\alpha\lambda}$, ставящая в соответствие каждому

---

* Всякое взаимнооднозначное симплициальное отображение нерва N на нерв N' называется изоморфным; если N и N' — изоморфные нервы, а Q, Q' — такие подкомплексы соответственно N и N', которые при некотором изоморфном отображении σ нерва N на N' переходят один в другой, то отображение σ, рассматриваемое лишь на Q, называется изоморфным отображением Q на Q'.

элементу второго рода покрытия $\beta\mu$ элемент второго рода покрытия $\alpha\lambda$. Только эти проекции $\sigma_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}$ будут теперь рассматриваться. Таким образом получаем, в силу [32.5], конфинальную часть

(35.1) $$K_1 = \{K_{\alpha\lambda}, \sigma_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}\}$$

спектра K.

В соответствии со сказанным в п. 32 мы обозначаем через $G'_{\alpha\lambda}$ открытый подкомплекс комплекса $K_{\alpha\lambda}$, состоящий из симплексов $T_{\alpha\lambda}$, удовлетворяющих следующему условию: среди вершин $T_{\alpha\lambda}$ по крайней мере одна соответствует внутреннему элементу второго рода покрытия $\alpha\lambda$.

Через $\tilde{\omega}_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}$ обозначаем проекцию клеточного комплекса $G'_{\beta\mu}$ в клеточный комплекс $G'_{\alpha\lambda}$, порожденную проекцией $\sigma_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}$.

Легко видеть *, что для любого $\alpha\lambda$ имеем $K_\alpha = G'_{\alpha\lambda}$; таким образом мы вправе отождествить группы

$$\Delta_\alpha^r = \Delta_{K_\alpha}^r \text{ с } \Delta_{(\alpha\lambda)'}^r = \Delta_{G'_{\alpha\lambda}}^r;\quad \nabla_\alpha^r = \nabla_{K_\alpha}^r \text{ с } \nabla_{(\alpha\lambda)'}^r = \nabla_{G'_{\alpha\lambda}}^r$$

и, следовательно,

$$\Delta_\Gamma = \varprojlim (\Delta_\alpha^r, \tilde{\omega}_\alpha^\beta) \text{ с } \Delta_{G'}^r = \varprojlim (\Delta_{(\alpha\lambda)'}^r, \tilde{\omega}'^{\beta\lambda}_{\alpha\lambda});$$

$$\nabla_\Gamma^r = \varinjlim (\nabla_\alpha^r, \pi_\beta^\alpha) \text{ с } \nabla_{G'}^r = \varinjlim (\nabla_{(\alpha\lambda)'}^r, \pi'^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}).$$

Но как покрытия $\alpha\lambda$, когредиентные с Γ, так, с другой стороны, правильные покрытия образуют конфинальные части множества всех покрытий K, поэтому, считаясь с [32.2], мы имеем естественный изоморфизм между

$$\Delta_{G'}^r \text{ и } \Delta_G^r;\quad \nabla_{G'}^r \text{ и } \nabla_G^r$$

и, следовательно, между Δ_Γ^r, ∇_Γ^r и Δ_G^r, ∇_G^r. Этот изоморфизм, рассматриваемый в направлении от Γ к G, обозначается через $\binom{\Gamma}{G}$, в обратном направлении — через $\binom{G}{\Gamma}$.

36. Основные определения и результаты для фигуры K, A, Г. Вследствие тождеств $\Delta_{\mathbf{K}}^r = \Delta_K^r$, $\nabla_{\mathbf{K}}^r = \nabla_K^r$, гомоморфизмы

$$E_K^A,\ E_K^G,\ \mathbf{I}_A^K,\ \mathbf{I}_G^K$$

групп

$$\Delta_A^r,\ \nabla_G^r,\ \nabla_K^r,\ \Delta_K^r$$

в группы

$$\Delta_K^r,\ \nabla_K^r,\ \nabla_A^r,\ \Delta_G^r$$

* См. (1), стр. 45, формула (8.41).

трансформируются естественными изоморфизмами в гомоморфизмы

$$E_{\mathbf{K}}^{\mathbf{A}} = E_{\mathbf{K}}^{A} \binom{A}{\mathbf{A}}, \quad E_{\mathbf{K}}^{\boldsymbol{\Gamma}} = E_{K}^{G} \binom{\boldsymbol{\Gamma}}{G}, \quad \mathbf{I}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}} = \binom{A}{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{A}^{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{I}_{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathbf{K}} = \binom{G}{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{I}_{G}^{K}$$

групп

$$\Delta_{\mathbf{A}}^{r}, \nabla_{\boldsymbol{\Gamma}}^{r}, \nabla_{\mathbf{K}}^{r}, \Delta_{K}^{r}$$

в группы

$$\Delta_{\mathbf{K}}^{r}, \nabla_{\mathbf{K}}^{r}, \nabla_{\mathbf{A}}^{r}, \Delta_{\boldsymbol{\Gamma}}^{r}$$

и таким образом определяют группы:

$$\Delta_{\mathbf{KA}}^{r} = E_{\mathbf{K}}^{\mathbf{A}} \Delta_{\mathbf{A}}^{r} = E_{K}^{A} \binom{\mathbf{A}}{A} \Delta_{A}^{r} = E_{K}^{A} \Delta_{\mathbf{A}}^{r} = \Delta_{KA}^{r}$$

$$\nabla_{\mathbf{AK}}^{r} = \mathbf{I}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}} \nabla_{\mathbf{K}}^{r} = \binom{A}{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{A}^{K} \nabla_{K}^{r} = \binom{A}{\mathbf{A}} \nabla_{AK}^{r}$$

$$\Delta_{\mathbf{A}:K}^{r} = (E_{\mathbf{K}}^{\mathbf{A}})^{-1} 0_{\mathbf{K}} = \binom{A}{\mathbf{A}} (E_{K}^{A})^{-1} 0_{\mathbf{K}} = \binom{A}{\mathbf{A}} \Delta_{A:K}^{r}$$

$$\nabla_{\mathbf{A}:K} = \nabla_{\mathbf{A}}^{r} - \nabla_{\mathbf{AK}}^{r} = \binom{A}{\mathbf{A}} \nabla_{A}^{r} - \binom{A}{\mathbf{A}} \nabla_{AK}^{r} = \binom{\mathbf{A}}{\mathbf{A}} \nabla_{A:K}^{r}$$

$$\nabla_{\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}}^{r} = E_{\mathbf{K}}^{\boldsymbol{\Gamma}} \nabla_{\boldsymbol{\Gamma}}^{r} = \nabla_{KG}^{r}$$

$$\Delta_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{K}}^{r} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathbf{K}} \Delta_{\mathbf{K}}^{r} = \binom{G}{\boldsymbol{\Gamma}} \Delta_{GK}^{r}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\Gamma}:K}^{r} = (E_{\mathbf{K}}^{\boldsymbol{\Gamma}})^{-1} 0_{\mathbf{K}} = \binom{G}{\boldsymbol{\Gamma}} \nabla_{G:K}^{r}$$

$$\Delta_{\boldsymbol{\Gamma}:K}^{r} = \binom{G}{\boldsymbol{\Gamma}} \Delta_{G:K}^{r}.$$

Так как все группы фигуры **K**, **A**, **Г** переводятся естественными изоморфизмами в соответствующие группы фигуры K, A, G, то *все изоморфизмы, двойственности и аннуляции, перечисленные нами в п. 11, сохраняют свою силу при замене в них K, A, G на* **K**, **A**, **Г**.

37. Замечания о естественных изоморфизмах и группах фигуры K, A, Г. Возьмем какой-нибудь элемент группы Δ_{A}^{r} (группы ∇_{A}^{r}). Среди покрытий **K** оставим лишь покрытия, когредиентные с **A**. Тогда для любого $\bar{z}^{r} \in \Delta_{A}^{r}$, $z^{r} \in \nabla_{A}^{r}$ можем написать:

$$\bar{z}^{r} = \{\bar{z}_{\alpha\lambda 0}^{r}\}, \quad z^{r} = \{z_{\alpha\lambda 0}^{r}\},$$

где индекс $\alpha\lambda 0$ означает, что соответствующий Δ-класс (∇-цикл) взят на $A_{\alpha\lambda}$. Как мы знаем, комплекс $A_{\alpha\lambda}$ может быть отождествлен с нервом покрытия $\alpha = \mathbf{A}\alpha\lambda$; поэтому $\bar{z}^{r}$, z^{r} могут быть рассматриваемы как элементы групп $\Delta_{\mathbf{A}}^{r}$, $\nabla_{\mathbf{A}}^{r}$. Полученное таким образом отождествление элементов групп Δ_{A}^{r}, ∇_{A}^{r} с элементами групп $\Delta_{\mathbf{A}}^{r}$, $\nabla_{\mathbf{A}}^{r}$ и представляет собою определенный выше естественный изоморфизм между $\Delta_{\mathbf{A}}^{r}$, ∇_{A}^{r} и $\Delta_{\mathbf{A}}^{r}$, $\nabla_{\mathbf{A}}^{r}$.

Теперь обозначаем через α покрытия множества **Г**. Пусть $z^{r} = \{z_{\alpha}^{r}\} \in \nabla_{\boldsymbol{\Gamma}}^{r}$. Каждое z_{α}^{r} может рассматриваться как ∇-цикл комплекса $G'_{\alpha\lambda}$, следовательно (так как $G'_{\alpha\lambda}$ открытый подкомплекс комплекса $G_{\alpha\lambda}$) как ∇-цикл комплекса $G_{\alpha\lambda}$, где $\alpha\lambda$ есть покрытие **K**, когредиентное с **Г** и $\alpha = \boldsymbol{\Gamma}\alpha\lambda$. Сохраняя среди покрытий **K** лишь когредиентные с **Г**, а среди проекций $\sigma_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}$ лишь те, которые ставят в соответствие элементам второго рода $\beta\mu$ элементы второго рода $\alpha\lambda$, мы вправе отождествить z^{r} с некоторым элементом группы ∇_{G}^{r}. Это отождествление и представляет собою установленный выше естественный изоморфизм $\binom{\boldsymbol{\Gamma}}{G}$ групп $\nabla_{\boldsymbol{\Gamma}}^{r}$ на группу ∇_{G}^{r}. Заметим при этом, что рассмотрение правильных покры-

тий только для того и было нужно, чтобы убедиться в том, что изоморфизм $\binom{\Gamma}{G}$ отображает ∇^r_{Γ} на ∇^r_G.

Теперь α — покрытие **K**. Пусть $\bar{z}^r_G = \{\mathfrak{z}_{\alpha i}\} \in \Delta^r_G$. Ставим в соответствие каждому $z^r_{\alpha 1} \in \mathfrak{z}^r_{\alpha 1}$ цикл $z^r_{(\alpha)'} = \mathbf{I}^{G_\alpha}_{G'_\alpha} z^r_{\alpha 1}$ (прием обычный, если рассматривать $z^r_{\alpha 1}$ как «относительный цикл» комплекса $K_\alpha \bmod A_\alpha$ и помнить, что $A'_\alpha \supseteq A_\alpha$). Это отображение представляет собою изоморфизм Δ^r_G на $\Delta^r_{G'}$ (это следует из наличия правильных покрытий, которые только здесь и применяются). Рассматривая одни лишь покрытия α, когредиентные с Γ, отождествляем далее $\bar{z}^r_{G'} = \{\mathfrak{z}^r_{(\alpha)'}\} \in \Delta^r_{G'}$ с некоторым элементом группы Δ^r_Γ. Этот переход от Δ^r_G к Δ^r_Γ и есть натуральный изоморфизм $\binom{G}{\Gamma}$ группы Δ^r_G на группу Δ^r_Γ.

Простое геометрическое содержание естественных изоморфизмов позволяет дать столь же простое прямое определение групп фигуры **K**, **A**, **Г**. Имея в виду тождества $\Delta^r_{\mathbf{KA}} = \Delta^r_{KA}$, $\nabla^r_{\mathbf{K\Gamma}} = \nabla^r_{KG}$, мы должны лишь дать определение групп $\nabla^r_{\mathbf{AK}}$, $\Delta^r_{\mathbf{\Gamma K}}$, $\Delta^r_{\mathbf{A:K}}$, $\nabla^r_{\mathbf{\Gamma:K}}$ (группы $\nabla^r_{\mathbf{A:K}}$ и $\Delta^r_{\mathbf{\Gamma:K}}$ определяются как фактор-группы $\nabla^r_{\mathbf{A:K}} = \nabla^r_{\mathbf{A}} - \nabla^r_{\mathbf{AK}}$, $\Delta^r_{\mathbf{\Gamma:K}} = \Delta^r_{\mathbf{\Gamma}} - \Delta^r_{\mathbf{\Gamma K}}$).

Отождествляя элементы пучка $z^r \in \nabla^r_{\mathbf{A}}$ с ∇-циклами $z^r_{\alpha\lambda 0}$ комплекса $A_{\alpha\lambda}$, где $\alpha\lambda$ когредиентно с **A**, мы можем сказать, что пучки $z^r = \{z^r_{\lambda 0}\}$, принадлежащие к ∇^r_{AK}, характеризуются тем свойством, что для каждого $\alpha\lambda$ можно найти $\beta\mu > \alpha\lambda$, когредиентное с **A**, так что $\pi^{\alpha\lambda 0}_{\beta\mu 0} z^r_{\alpha\lambda 0}$ есть ∇-цикл, продолжаемый на комплекс $\widehat{K_{\beta\mu}}$.

Подобным же образом нити $\bar{z}^r \in \Delta^r_{\mathbf{\Gamma K}}$ характеризуются следующим свойством: если отождествить элементы нити $\bar{z}^r$ с Δ-классами комплекса $G'_{\alpha\lambda}$, где $\alpha\lambda$ когредиентно с **Г**, и перейти затем, пользуясь правильными покрытиями, от спектра G' к спектру G, то получится нить спектра G, продолжаемая в смысле п. 26.

Элементы группы $\Delta^r_{\mathbf{A:K}}$ суть нити $\bar{\mathfrak{z}}^r \in \Delta^r_{\mathbf{A}}$, «ограничивающие на **K**»; это значит: если мы рассматриваем $z^r_\alpha \in \mathfrak{z}^r_\alpha \in \bar{\mathfrak{z}}^r \in \Delta^r_{\mathbf{A:K}}$ как Δ-цикл комплекса $A_{\alpha\lambda}$ (где $\alpha\lambda$ когредиентно с **A** и $\mathbf{A}\alpha\lambda = \alpha$), то этот цикл ограничивает на $K_{\alpha\lambda}$.

Элементы группы $\nabla^r_{\mathbf{\Gamma:K}}$ суть пучки $z^r_\alpha \in \nabla^r_G$, «ограничивающие на **K**»; это значит: если рассматривать элементы пучка z^r как ∇-циклы на $G_{\alpha\lambda}$ (где $\alpha\lambda$ когредиентно с **Г**), то весь пучок z^r является подмножеством пучка, представляющего собою нулевой элемент группы ∇^r_K. Другими словами, если $z^r_{\alpha\lambda} \in z^r$, то существует такое $\beta\mu > \alpha\lambda$, что $\pi^{\alpha\lambda 1}_{\beta\mu 1} z^r_{\alpha\lambda}$ ограничивает на $K_{\beta\mu}$.

Заметим, что элементы группы $\nabla^r_{\mathbf{A:K}} = \nabla^r_{\mathbf{A}} - \nabla^r_{\mathbf{AK}}$ могут быть непосредственно определены как $\mathbf{K}_\nabla$-классы ∇-циклов: пусть α, β — два покрытия множества **A**; определяем N_α, N_β, K_α, K_β как в п. 34. Два ∇-цикла z^r_α и z^r_β комплексов K_α, K_β принадлежат по определению к тому же $\mathbf{K}_\nabla$-классу, если существуют покрытия $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$ пространства **K**,

когредиентные с $\mathbf{A}$ и такие, что $\mathbf{A}\alpha\lambda = \alpha$, $\mathbf{A}\beta\mu = \beta$, $\mathbf{A}\gamma\nu = \gamma$, $\gamma\nu > \alpha\lambda$, $\beta\mu$ и что $\pi^{\alpha\lambda 0}_{\gamma\nu 0} z^r_\alpha - \pi^{\beta\mu 0}_{\gamma\nu 0} z^r_\beta$ есть ∇-цикл комплекса A_γ, продолжаемый на комплекс $K_{\gamma\nu}$.

Подобным же образом элементы группы $\Delta^r_{\Gamma:K}$ суть $\mathbf{K}_\Delta$-классы нитей, причем по определению две нити $\bar{z}^r = \{\bar{\mathfrak{z}}^r_\alpha\} \in \Delta^r_\Gamma$ и $\bar{z}'^r = \{\mathfrak{z}'^r_\alpha\} \in \Delta^r_\Gamma$ принадлежат к тому же $\mathbf{K}_\Delta$-классу, если для каждого α цикл $z^r_\alpha - z'^r_\alpha$, $z^r_\alpha \in \mathfrak{z}^r_\alpha$, $z'^r_\alpha \in \mathfrak{z}'^r_\alpha$, рассматриваемый как цикл комплекса $G'_{\alpha\lambda}$ (где $\alpha\lambda$ когредиентно с Γ) продолжаем на $K_{\alpha\lambda}$.

38. Другая форма определения естественных изоморфизмов. Эта форма понадобится лишь в замечании 1, п. 43 гл. IV. Мы сохраняем обозначения п. п. 30 и 31 и берем в каждом K_α замкнутый подкомплекс A''_α, вершины которого те же, что и у комплекса $\mathbf{A}_\alpha$, а симплексы $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$ соответствуют тем совокупностям $o_{\alpha i_0}, \ldots, o_{\alpha i_r}$ элементов α, для которых $\mathbf{A} \cap o_{\alpha i 0} \cap \ldots \cap o_{\alpha i_r} \neq 0$. Очевидно $A''_\alpha \subseteq A_\alpha$ и (38.1) $A''_\alpha = A_\alpha$, если α когредиентно с $\mathbf{A}$. Обозначаем теперь через $\alpha\lambda$ любые покрытия $\mathbf{K}$. Каждому $\alpha\lambda = \{o_1, \ldots, o_p, \ldots, o_s\}$ соответствует покрытие

$$\alpha = A\alpha\lambda = \{Ao_1, \ldots, Ao_p\},$$

где $\mathbf{A}o_i = \mathbf{A} \cap o_i$ суть «обозначенные множества» [(1), стр. 31, § 5], т. е. $\mathbf{A}o_i$ и $\mathbf{A}o_j$ считаются различными лишь когда $i \neq j$. Каждое покрытие α множества $\mathbf{A}$ может быть получено в виде $\mathbf{A}\alpha\lambda$. Нерв покрытия $\mathbf{A}\alpha\lambda$ есть $A''_{\alpha\lambda}$, поэтому мы имеем «естественный изоморфизм» между группами $\nabla^r_\mathbf{A}$, $\Delta^r_\mathbf{A}$ и

$$\nabla^r_{\mathbf{A}''} = \varinjlim (\nabla^r_{A''_{\alpha\lambda}}, \quad \pi^{\alpha\lambda 0}_{\beta\mu 0}), \quad \Delta^r_{\mathbf{A}''} = \varprojlim (\Delta^r_{A''_{\alpha\lambda}}, \ \tilde{\omega}^{\beta\mu 0}_{\alpha\lambda 0}).$$

В силу тождества (38.1) этот изоморфизм трансформирует гомоморфизмы $\mathbf{I}^\mathbf{K}_{\mathbf{A}''}$ группы ∇^r_K в $\nabla^r_{\mathbf{A}''}$ и $E^{\mathbf{A}''}_K$ группы $\Delta^r_{\mathbf{A}''}$ в Δ^r_K соответственно в гомоморфизмы $\mathbf{I}^\mathbf{K}_\mathbf{A}$ и $E^\mathbf{A}_\mathbf{K}$ группы $\nabla^r_\mathbf{K}$ в $\nabla^r_\mathbf{A}$ и группы $\Delta^r_\mathbf{A}$ в $\Delta^r_\mathbf{K}$, определенные в п. 34.

§ 10. Случай кривых полиэдров K и A ⊆ K

39. Теорема инвариантности. Пусть $\mathbf{K}$ — конечный эвклидов полиэдр [мы пользуемся терминологией (4), стр. 128]; пусть K — симплициальное разбиение [(4), стр. 129] полиэдра $\mathbf{K}$. Обозначим через A какой-нибудь замкнутый подкомплекс комплекса K, через $\mathbf{A}$ — полиэдр, образованный из симплексов A, и положим, как всегда, $G = K \setminus A$, $\Gamma = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$. Докажем, что *группы фигуры* $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$, Γ *изоморфны группам фигуры* K, A, G. Для этого рассмотрим последовательные барицентрические подразделения

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$$
$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

комплексов K и A. Для любого n обозначим на время через λ'_n покрытие полиэдра $\mathbf{K}$ замкнутыми барицентрическими звездами комплекса K_n, и берем столь тесные окрестности элементов покрытия λ'_n, чтобы полу-

чилось открытое покрытие λ_n полиэдра **K**, когредиентное с **A** и подобное покрытию λ_n. Комплексы K_n и A_n являются соответственно нервами покрытий λ_n и $A\lambda_n$. Проекции нерва K_{n+1} в K_n (нерва A_{n+1} в A_n) ставят в соответствие каждой вершине e_{n+1} комплексов K_{n+1}, A_{n+1} одну из вершин носителя точки e_{n+1} в K_n (в A_n) и являются поэтому так называемыми «естественными сдвигами» («natürliche Verschiebungen» в терминологии ([4]), стр. 349). Поэтому, хорошо известным стандартным процессом устанавливается изоморфизм между группами $\Delta^r_{\mathbf{K}}$, $\Delta^r_{\mathbf{A}}$ и Δ^r_K, Δ^r_A, причем этот изоморфизм изоморфно отображает $\Delta^r_{\mathbf{KA}}$ на Δ^r_{KA} и $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ на $\Delta^r_{A:K}$. Так как все остальные группы фигур **K**, **A**, **Г** получаются из групп $\Delta^r_{\mathbf{K}}$, $\Delta^r_{\mathbf{A}}$, $\Delta^r_{\mathbf{KA}}$, тою же алгебраической конструкцией, которой группы фигуры K, A, G получаются из Δ^r_K, Δ^r_A, Δ^r_{KA}, то все группы фигуры **K**, **A**, **Г** изоморфны соответствующим группам фигуры K, A, G, что и требовалось доказать.

40. Общий полиэдральный случай. Пусть теперь **K** и $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ — кривые полиэдры (т. е. топологические образы конечных эвклидовых полиэдров). Без ограничения общности можно предположить, что **K** — эвклидов полиэдр. Как всегда $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$. В качестве областей коэффициентов мы рассматриваем до конца главы лишь так называемые э л е м е н т а р н ы е г р у п п ы, т. е. дискретные группы с конечным числом образующих и их группы характеров. Так как все подгруппы и все фактор-группы элементарных групп суть элементарные группы, то группы $\Delta^r_{\mathbf{K}}$, $\Delta^r_{\mathbf{K}}$; $\Delta^r_{\mathbf{A}}$, $\nabla^r_{\mathbf{A}}$; $\Delta^r_{\mathbf{KA}}$, $\nabla^r_{\mathbf{K\Gamma}}$; $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$, $\nabla^r_{\mathbf{AK}}$, а также в силу третьей пары изоморфизмов, — группы $\Delta^r_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$, $\nabla^r_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$ при $r \geqslant 1$ — элементарны. Как известно, если при данной дискретной группе X подгруппа $U \subseteq X$ и фактор-группа $X - U$ элементарны, то и сама группа X элементарна (см., например, ([4]), стр. 576, п. 38). Отсюда и из первой пары изоморфизмов п. 14 следует, что группы $\Delta^r_{\mathbf{\Gamma}}$, $\nabla^r_{\mathbf{\Gamma}}$ при $r \geqslant 1$ элементарны. Группа $\Delta^0_{\mathbf{\Gamma}}(X)$ есть, как нетрудно видеть, прямая сумма стольких групп, изоморфных группе X, каково число *компактных* (к себе) компонент открытого множества, но число этих компонент конечно (это следует из конечности числа компонент **K**), так что в нашем случае группы $\Delta^0_{\mathbf{\Gamma}}$, $\nabla^0_{\mathbf{\Gamma}}$ также элементарны. Итак:

[40.1]. Для кривых полиэдров **K** и $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ все группы фигуры **K**, **A**, **Г**, взятые по элементарным группам коэффициентов, элементарны. Если группа коэффициентов конечна, то все группы фигуры **K**, **A**, **Г** также конечны.

В силу второй пары изоморфизмов порядок группы $\nabla^r_{\mathbf{K}}$ при конечной группе коэффициентов X равняется произведению порядков групп $\nabla^r_{\mathbf{K\Gamma}}$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$. В частности это верно, когда группой коэффициентов является циклическая группа $X = \mathbf{I}_m$ любого конечного порядка m. Отсюда на основании теоремы М. Ф. Бокштейна [([6]), стр. 373], следует, что группы $\nabla^r_{\mathbf{K}}$ по любой области коэффициентов вполне опреде-

ляются группами $\nabla^r_{\mathbf{K}\Gamma}(m)$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}(m)$, взятыми для всех m и всех r. Таким же точно образом из первой пары изоморфизмов следует, что группы $\Delta^r_{\mathbf{A}}$ вполне определены группами $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}(m)$ и $\Delta^r_{\mathbf{KA}}(m)$, взятыми для всех m и r. Чтобы получить аналогичный результат для группы ∇_Γ, нам нужна следующая

ЛЕММА. *Группы $\nabla^r_\Gamma(m)$ (даже группы $\nabla^r_\Gamma(X)$ для любой области коэффициентов X) выражаются через группы $\nabla^r_\Gamma(\mathbf{I})$ тем же самым образом, как в случае, когда Γ есть конечный клеточный комплекс.*

Предположим на время, что лемма доказана. Тогда, так как теорема Бокштейна опирается лишь на отношения, связывающие $\nabla^r_{\mathbf{K}}(\mathbf{I})$ и $\nabla^r_{\mathbf{K}}(m)$ при различных m и r, доказательство ее дословно сохраняет силу и в нашем случае, и мы получаем следующий результат:

Теорема Бокштейна для открытого множества Γ. *Группы $\nabla^r_\Gamma(\mathbf{I})$, а следовательно, и все группы $\nabla^r_\Gamma(X)$ для любой области коэффициентов X, вполне определяются порядками групп $\nabla^r_\Gamma(m)$, взятых для всех m и всех r.*

Так как, в силу первой пары изоморфизмов, порядок группы $\nabla^r_\Gamma(m)$ равен произведению порядка $\nabla^r_{\Gamma:\mathbf{K}}(m)$ и $\nabla^r_{\Gamma\mathbf{K}}(m)$, то группы ∇^r_Γ вполне определены группами $\nabla^r_{\Gamma:\mathbf{K}}(m)$ и $\nabla^r_{\mathbf{K}\Gamma}(m)$, взятыми для всех m и r.

Остается лишь доказать лемму. Это доказательство содержится в конструкции Steenrod'a ([13]), п. 11, которая в нашем случае дает как раз нужный нам результат. Однако, поставленную цель можно достигнуть и проще с помощью следующих соображений М. Ф. Бокштейна, которые пользуются лишь окончательным результатом Steenrod'a, а не его промежуточными построениями. Эти соображения таковы. Так как группы $\nabla^r_\Gamma(\mathbf{I})$ суть группы с конечным числом образующих, то существует нерв N, группы $\nabla^r_N(\mathbf{I})$ которого соответственно изоморфны группам $\nabla^r_\Gamma(\mathbf{I})$ [см., например, ([4]), стр. 266, п. 9]. Пусть $\tilde{N}$ - полиэдр, составленный из симплексов нерва N. В силу фундаментальной теоремы Steenrod'a группы $\nabla^r_\Gamma(m)$ выражаются через группы $\nabla^r_\Gamma(\mathbf{I})$, и эти выражения зависят лишь от самих этих групп (и групп коэффициентов) и поэтому таковы же, как выражения $\nabla^r_{\tilde{N}}(m)$ через $\nabla^r_{\tilde{N}}(\mathbf{I})$. Но группы $\nabla^r_{\tilde{N}}(\mathbf{I})$, $\nabla^r_{\tilde{N}}(m)$ изоморфны группам $\nabla^r_N(\mathbf{I})$, $\nabla^r_N(m)$, и группы $\nabla^r_{\tilde{N}}(m)$ выражаются через $\nabla^r_{\tilde{N}}(\mathbf{I})$ так же, как $\nabla^r_N(m)$ выражается через $\nabla^r_N(\mathbf{I})$, откуда и следует лемма.

Все результаты, сформулированные в п. 14 (гл. 1) нами полностью доказаны. Заметим, что и результаты, относящиеся к кругу так называемой теоремы Фрагмена-Брауэра, доказанные для комплексов в п. 18, без труда обобщаются сначала на случай спектров, а затем и пространств. Это обобщение происходит совершенно теми же методами, как те, которые мы подробно разобрали в главах II и III в применении к результатам п. 14, и поэтому может быть предоставлено читателю.

ГЛАВА IV. МНОГООБРАЗИЯ

§ 11. Бесконечные комплексы

41*. Бесконечные комплексы. В этом параграфе Q обозначает локально конечный полный симплициальный комплекс; сумма всех симплексов такого комплекса является локально бикомпактным пространством $\mathbf{Q}$. Мы обозначаем через L_Q^r группу r-мерных *конечных* цепей комплекса Q относительно дискретной группы коэффициентов X; через $\overline{L}_Q^r$ обозначается группа *всех* (бесконечных) r-мерных цепей комплекса Q относительно бикомпактной группы $\Xi \mid X$; при этом группа $\overline{L}_Q^r$ топологизируется так [(13), стр. 691], что делается прямой суммой [(10), § 21] групп $\overline{L}_i^r$, изоморфных группе Ξ_r; группа $\overline{L}_i^r$ есть группа всех цепей вида $\overline{a}t_i^r$, где t_i^r есть определенный ориентированный симплекс комплекса Q, а $\overline{a}$ пробегает всю группу Ξ. Так как L_Q^r есть прямая сумма групп L_i^r (где L_i^r состоит из всех цепей вида at_i^r и a пробегает группу X), то $L_Q^r \mid \overline{L}_Q^r$. Теперь мы обычным путем определяем группы ∇_Q^r и Δ_Q^r: группа ∇_Q^r (группа Δ_Q^r) есть фактор-группа группы всех r-мерных конечных ∇-циклов (бесконечных Δ-циклов) по подгруппе ограничивающих циклов (ограничивающий конечный ∇-цикл по определению ограничивает конечную цепь). Группы ∇_Q^r и Δ_Q^r двойственны между собою.

Ближайшая задача этого параграфа — доказать изоморфизмы

$$\Delta_Q^r \approx \Delta_{\mathbf{Q}}^r, \quad \nabla_Q^r \approx \nabla_{\mathbf{Q}}^r. \tag{41.1}$$

В виду двойственностей $\nabla_Q^r \mid \Delta_Q^r$, $\nabla_{\mathbf{Q}}^r \mid \Delta_{\mathbf{Q}}^r$ достаточно доказать первый из изоморфизмов (41.1). Это доказательство опирается на некоторые предварительные замечания и леммы [41.2] и [41.3].

Пусть α — конечное открытое покрытие пространства $\mathbf{Q}$, пусть N_α — нерв α. Элементы α с бикомпактными замыканиями и соответствующие этим элементам вершины N_α называем регулярными, остальные элементы α и вершины N_α — иррегулярными. Подкомплекс C_α (см. п. 30), состоящий из симплексов N_α, все вершины которых иррегулярны, называется иррегулярной частью нерва N_α, а комплекс $K_\alpha = N_\alpha \setminus C_\alpha$ назовем регулярной частью нерва N_α.

Конечный открытый подкомплекс G комплекса Q называем *регулярным подкомплексом*, если он является суммой звезд ** некоторых вершин Q, или (что тоже самое) если каждый симплекс G имеет хотя бы одну вершину, являющуюся элементом G. Легко видеть: если G — произвольный открытый конечный подкомплекс комплекса Q, а Q_1 и G_1 суть, соответственно, барицентрические подразделения комплексов Q и G, то G_1 есть регулярный подкомплекс комплекса Q_1.

---

* На п. 41 дальнейшее изложение не опирается.

** Звезды мы рассматриваем то как открытые подкомплексы комплекса Q, то как составленные из симплексов этих подкомплексов точечные множества; можно надеяться, что это двойное словоупотребление не поведет к недоразумениям.

Покрытие α называется **комбинаторным по отношению к** Q, если выполнены следующие условия:

а) Все регулярные элементы покрытия α суть звезды некоторых вершин комплекса Q.

б) Пусть G_α есть (регулярный) подкомплекс комплекса Q, определенный как сумма звезд, являющихся элементами α; пусть Γ_α — соответствующее точечное множество, $\overline{\Gamma}_\alpha$ — его замыкание. Всякий иррегулярный элемент покрытия α либо не пересекается с $\overline{\Gamma}_\alpha$, либо состоит из звезды вершины некоторого симплекса G_α и из множества, лежащего в $\mathbf{Q} \setminus \overline{\Gamma}^\alpha$.

ЛЕММА [41.2]. *Пусть α — покрытие, комбинаторное относительно Q; тогда регулярная часть нерва покрытия α является регулярным подкомплексом комплекса Q; обратно, всякий регулярный подкомплекс G комплекса Q есть регулярная часть нерва некоторого покрытия, комбинаторного по отношению к Q.*

Первое утверждение [41.2] непосредственно следует из определения покрытий, комбинаторных по отношению к Q. Докажем второе утверждение. Пусть e_i — вершина какого-либо элемента G. Если вершина e_i сама является элементом G, обозначаем через o_i звезду этой вершины. Если же e_i не содержится в G, обозначаем через o_i сумму звезды e_i относительно Q и множества $\mathbf{Q} \setminus \overline{\Gamma}$. Множества o_i и являются элементами искомого покрытия.

ЛЕММА [41.3]. *За каждым покрытием α пространства $\mathbf{Q}$ следует покрытие, комбинаторное относительно некоторого подразделения Q_α комплекса Q.*

Доказательство. Пусть $o_1, \ldots, o_p$ — регулярные, а $o_{p+1}, \ldots, o_s$ — иррегулярные элементы покрытия α. Впишем в α замкнутое покрытие

$$a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_s, \qquad a_i \subseteq o_i$$

пространства $\mathbf{Q}$; без ограничения общности можно предположить, что ни одно из замкнутых множеств $a_{p+1}, \ldots, a_s$ не бикомпактно; множества $a_1, \ldots, a_p$, наоборот, все, очевидно, бикомпактны. Берем подразделение Q_α столь мелким, чтобы всякая звезда комплекса Q_α, пересекающаяся с a_i, лежала в o_i. Пусть теперь звезды вершины Q_α, пересекающиеся с каким-либо из множеств $a_1, \ldots, a_p$, суть

$$o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha u};$$

симплексы этих звезд образуют регулярный подкомплекс G_α комплекса Q_α, покрывающий точечное множество Γ_α. Пусть o_h, $h > p$ есть открытое множество, образованное звездами, пересекающимися с a_h; заметим, что всякая точка a_h, принадлежащая к $\overline{\Gamma}_\alpha \setminus \Gamma_\alpha$, принадлежит звезде некоторой не входящей в G_α вершины какого-либо из симплексов G_α. Пусть $e'_1, \ldots, e'_q$ — все такие вершины. Обозначим через $o'_{\alpha i}$ звезду вершины e'_i относительно Q_α и положим для $i = 1, 2, \ldots, q$

$$o_{\alpha, u+i} = o'_{\alpha i} \cup (o_{h_i} \setminus \overline{\Gamma}_\alpha),$$

где h_i выбрано так, что a_{h_i} пересекается с $o'_{\alpha i}$. По определению o_h имеем $o'_{\alpha i} \subseteq o_{h_i} \subseteq o_{h_i}$, и $o_{\alpha, u+1} \subseteq o_{h_i}$. Если при построении множеств

$o_{\alpha, u+1}$ мы воспользовались не всеми o_h, то вычитаем из оставшихся множеств o_h их пересечения с $\overline{\Gamma}$ и полученные разности обозначаем через $o_{\alpha, u+q+1}, \ldots, o_{\alpha v}$. Покрытие

$$\{o_{\alpha 1}, \ldots, o_{\alpha u}, \ldots, o_{\alpha, u+q}, \ldots, o_{\alpha v}\}$$

есть искомое.

ЛЕММА [41.3] позволяет при определении групп $\Delta_{\mathbf{Q}}^r$ рассматривать лишь покрытия пространства $\mathbf{Q}$, комбинаторные относительно каких-либо подразделений комплекса Q, причем если α комбинаторно относительно Q_α, а β — относительно Q_β, то полагаем $\beta > \alpha$ лишь при одновременном выполнении следующих двух условий:

1°. β вписано в α, но α не вписано в β;

2°. Q_β есть подразделение комплекса Q_α.

Отобранные покрытия вместе с только что установленным отношением порядка между ними образуют конфинальную часть множества всех покрытий пространства $\mathbf{Q}$; при этом проекции σ_α^β порождаются, как легко видеть, естественными сдвигами Q_β в Q_α (п. 39); как всегда, они порождают проекции $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ комплекса $K_\beta = N_\beta \setminus C_\beta$ в $K_\alpha = N_\alpha \setminus C_\alpha$ и

$$\Delta_{\mathbf{Q}}^r = \varprojlim (\Delta_{K_\alpha}^r, \tilde{\omega}_\alpha^\beta). \tag{41.4}$$

Рассмотрим теперь всевозможные конечные открытые подкомплексы $G_{\alpha\lambda}$ всевозможных подразделений Q_λ комплекса Q (в частности, через G_α обозначаем теперь подкомплексы самого Q). Говорим, что $G_{\beta\mu}$ следует за $G_{\alpha\lambda}$ и пишем $\beta\mu > \alpha\lambda$, если Q_μ есть подразделение Q_λ и подразделение $s_\mu^\lambda G_{\alpha\lambda}$ комплекса $G_{\alpha\lambda}$ в Q_μ есть подкомплекс комплекса $G_{\beta\mu}$ (в частности $\beta > \alpha$ означает просто $G_\alpha \subset G_\beta$). Обозначаем через σ_λ^μ естественные сдвиги Q_μ в Q_λ и пишем (в качестве индексов) $(\beta\mu)\lambda$ вместо $\sigma_\lambda^\mu G_{\beta\mu}$ и $\alpha\lambda$ вместо $G_{\alpha\lambda}$. Помня, что $G_{\alpha\lambda}$ — открытый подкомплекс комплекса $\sigma_\lambda^\mu G_{\beta\mu}$, определяем проекции $\rho_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}$ клеточного комплекса $G_{\beta\mu}$ в $G_{\alpha\lambda}$ равенствами $\rho_{\alpha\lambda}^{\beta\mu} x_{\beta\mu}^r = \mathbf{I}_{\alpha\lambda}^{(\beta\mu)\lambda} \sigma_\lambda^\mu x_{\beta\mu}^r$ для любой цепи $x_{\beta\mu}^r$ на $G_{\beta\mu}$. В частности, при $\mu = \lambda$ имеем $\rho_{\alpha\lambda}^{\beta\lambda} x_{\beta\lambda}^r = \mathbf{I}_{\alpha\lambda}^{\beta\lambda} x_{\beta\lambda}^r$, что дает для подкомплексов Q равенство $\rho_\alpha^\beta = \mathbf{I}_\alpha^\beta$.

Те $G_{\alpha\lambda}$, которые являются подразделениями $G_\alpha \subset Q$, образуют конфинальную часть множества всех $G_{\alpha\lambda}$, причем $\rho_\alpha^{\alpha\lambda}$ отображает $\Delta_{\alpha\lambda}^r$ на Δ_α^r изоморфно, откуда следует, что

$$\varprojlim (\Delta_{\alpha\lambda}^r, \rho_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}) \approx \varprojlim (\Delta_\alpha^r, \mathbf{I}_\alpha^\beta).$$

Но $\varprojlim (\Delta_\alpha^r, \mathbf{I}_\alpha^\beta)$ изоморфно группе Δ_Q^r [см. ([13]), стр. 691—692], поэтому

$$\Delta_Q^r \approx \varprojlim (\Delta_{\alpha\lambda}^r, \rho_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}). \tag{41.5}$$

С другой стороны, так как регулярные подкомплексы образуют конфинальную часть во множестве всех $G_{\alpha\lambda}$, то из леммы [41.2] легко

выводится изоморфизм $\Delta_{\mathbf{Q}}^{r} \approx \varprojlim (\Delta_{\mu}^{r}, \rho_{\mu}^{\beta\mu})$, что вместе с (41.5) дает искомый изоморфизм $\Delta_{\mathbf{Q}}^{r} \approx \Delta_{Q}^{r}$.

42. Группы δ_{Q}^{r} и закон двойственности Александера—Понтрягина. Пусть X — дискретная группа коэффициентов. Обозначим через δ_{Q}^{r} фактор-группу группы всех r-мерных конечных Δ-циклов бесконечного комплекса Q по подгруппе циклов, ограничивающих конечные цепи.

До конца параграфа предполагаем, что Q есть n-мерное комбинаторное многообразие в гомологическом смысле, т. е. что для звезды S любой вершины комплекса Q имеем

$$\Delta_{S}^{r}(\mathbf{I}) \approx \nabla_{S}^{r}(\mathbf{I}) \approx \mathbf{I}, \quad \Delta_{S}^{r}(\mathbf{I}) = \nabla_{S}^{r}(\mathbf{I}) = 0$$

при $0 \leq r \leq n$. Предполагаем кроме того, что Q ориентируемо *, т. е. что $\Delta_{Q_i}^{n}(\mathbf{I}) \approx \nabla^{n}(\mathbf{I}) \approx \mathbf{I}$, для любой компоненты ** Q_i многообразия Q. Ориентированные открытые барицентрические звезды Q образуют клеточный комплекс Q^*. Если t_i^p есть ориентированный симплекс Q, то обозначаем через τ_i^q, $q = n - p$ барицентрическую звезду с центром в центре симплекса t_i^p, ориентированную так, чтобы индекс пересечения t_i^p и τ_i^q равнялся $+1$:

$$(t_i^p \times \tau_i^q) = +1 \text{ [см., например ([12]), стр. 278].}$$

Тогда мы имеем в клеточном комплексе Q^* коэффициенты инциденгности

$$(\tau_j^{q+1} : \tau_i^q) = (-1)^p (t_i^p : t_j^{p-1}), \qquad p + q = n.$$

Определим теперь для каждой цепи x^p комплекса Q цепь $D^q x^p$ размерности $q = n - p$ комплекса Q^*, требуя, чтобы цепь $D^q x^p$ принимала на τ_i^q то значение, которое x^p принимает на t_i^p:

$$(D^q x^p \cdot \tau_i^q) = (x^p \cdot t_i^p).$$

Легкое вычисление показывает, что всегда

$$\Delta D^q x^p = (-1)^{p+1} D^{q-1} \nabla x^p, \tag{42.1}$$

откуда следует, что оператор D^q порождает изоморфизм между группами ∇_{Q}^{p} и $\delta_{Q^*}^{q}$. Так как и δ_Q и $\delta_{Q^*}^{q}$ изоморфны группе $\delta_{Q_1}^{q}$, где Q_1 есть барицентрическое подразделение комплекса Q, то имеем

Закон двойственности Пуанкаре. *$\nabla_{Q}^{p} \approx \delta_{Q}^{q}$ при $p + q = n$ для любого n-мерного ориентируемого многообразия Q.*

Пусть $\mathbf{Q}$ есть непрерывное n-мерное ориентируемое многообразие, т. е. (конечный или бесконечный) полиэдр, какое-либо (и следовательно любое) симплициальное разбиение которого есть ориентируемое комбинаторное многообразие. Тогда всякое открытое множество в $\mathbf{Q}$ также есть

---

* Ограничиваясь областью коэффициентов $X = \mathbf{I}_2$, можно отказаться от требования ориентируемости; тогда отпадут все дальнейшие выборы ориентаций и последующие рассуждения только упростятся.

** В определение многообразия мы требования связности не включаем.

непрерывное n-мерное ориентируемое многообразие [см. (4), стр. 143—146, теорема Рунге]. Из законов двойственности Колмогорова и Пуанкаре следует тогда

Закон двойственности Александера-Понтрягина. *Если n-мерное ориентируемое многообразие* $\mathbf{Q}$ *односвязно в размерностях* p *и* $p+1$ *и* $\mathbf{A}$ — *замкнутое множество в* $\mathbf{Q}$, *то группы* $\Delta^p_{\mathbf{A}}$ *и* δ^{q-1}_{Γ} *двойственны* (*группы* $\nabla^p_{\mathbf{A}}$ *и* δ^{q-1}_{Γ} *изоморфны*) *между собою.*

Обобщением этой теоремы на случай любого, не непременно односвязного в размерностях p и $p+1$ многообразия, является

Общий закон двойственности Александера-Понтрягина. *Для любого ориентируемого n-мерного многообразия* $\mathbf{K}$ *и замкнутого множества* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ *группы* $\nabla^p_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ *и* $\delta^{q-1}_{\Gamma:\mathbf{K}}$ *изоморфны между собою; при этом группа* $\delta^r_{\Gamma:\mathbf{K}}$ *определена как фактор-группа группы конечных r-мерных Δ-циклов открытого множества* $\Gamma = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$ *по подгруппе ограничивающих* (конечные цепи) *циклов.*

Замечание. Область коэффициентов дискретна; конечные циклы на Γ должны быть определены тем или иным инвариантным способом [например, как непрерывные циклы в смысле (4), стр. 333—339, или как сходящиеся циклы на компактах $\Phi \subset \Gamma$, см. п. 43], или заменены так называемыми δ-классами (п. 43).

Для доказательства только что сформулированной теоремы мы должны лишь доказать изоморфизм групп $\nabla^r_{\Gamma:\mathbf{K}}$ и $\delta^r_{\Gamma:\mathbf{K}}$. Это делается обычным методом, служащим для доказательства так называемых теорем инвариантности [см., например, (4), гл. 9]. Однако, такое доказательство * наталкивается на необходимость доказать некоторую комбинаторную лемму, которую читатель найдет в п. 45. Но эта же лемма является единственным существенным моментом и в прямом доказательстве изоморфизма $\nabla^p_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} \approx \delta^{q-1}_{\Gamma:\mathbf{K}}$. Поэтому мы предпочитаем в нашем дальнейшем изложении дать это прямое, по существу совершенно элементарное доказательство, не зависящее не только от настоящего параграфа (кроме общеизвестных элементарных фактов об изоморфизме D^q), но и от всего содержания глав II и III: доказательство опирается лишь на п. 15 главы I и на определение $\Delta^r_{A:K}$ для случая комплексов K и A.

§ 12. Группы $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ для многообразия $\mathbf{K}$; группы $\delta^r_{\Gamma:\mathbf{K}}$

43. Группы $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$. Хотя все нижеследующие рассуждения применимы к случаю, когда $\mathbf{K}$ есть многообразие в наиболее общем смысле этого слова (см. п. 42), мы для простоты предполагаем, что $\mathbf{K}$ есть n-мерное замкнутое ориентируемое гомологическое многообразие, т. е. связный конечный эвклидов полиэдр, какое-нибудь (и следовательно всякое) симплициальное разбиение K которого удовлетворяет условиям:

* Оно в сжатом виде дано в моей работе (3).

1°. Для звезды O_i любой вершины комплекса K имеем $\Delta^n_{O_i}(I) \approx \approx \nabla^n_{O_i}(\mathbf{I}) \approx \mathbf{I}$ и $\Delta^r_{O_i}(\mathbf{I}) \approx \nabla^r_{O_i}(\mathbf{I}) = 0$ при $0 \leqslant r < n$.

2°. $\nabla^n_K(\mathbf{I}) \approx \mathbf{I}$.

Через $\mathbf{A}$ обозначено замкнутое множество в $\mathbf{K}$ и $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$. В этом случае группы $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ определяются совершенно элементарно и независимо от общей теории глав II и III, а именно следующим образом:

Пусть

(43.1) $$K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\alpha,\ \ldots$$

последовательные подразделения полиэдра K; при этом предполагаем, что $K_{\alpha+1}$ есть результат одного или нескольких последовательных барицентрических подразделений комплекса K_α. Обозначим через A_α замкнутый подкомплекс комплекса K_α, состоящий из всех симплексов K_α, пересекающихся с $\mathbf{A}$, и из всех граней этих симплексов.

Каждой вершине $e_{\alpha+1}$ комплекса $K_{\alpha+1}$ ставим в соответствие определенную вершину $e_\alpha = \sigma^{\alpha+1}_\alpha e_{\alpha+1}$ носителя точки $e_{\alpha+1}$ в K_α. Таким образом получается вполне определенное симплициальное отображение $\sigma^{\alpha+1}_\alpha$ [«естественный сдвиг» в смысле ([4]), стр. 349] комплекса $K_{\alpha+1}$ в комплексе K_α, отображающее $A_{\alpha+1}$ в A_α. Для $\beta > \alpha + 1$ полагаем

$$\sigma^\beta_\alpha = \sigma^{\alpha+1}_\alpha \sigma^{\alpha+2}_{\alpha+1} \ldots \sigma^\beta_{\beta-1},$$

откуда следует, что при $\gamma > \beta > \alpha$ имеем $\sigma^\gamma_\alpha = \sigma^\beta_\alpha \sigma^\gamma_\beta$. Симплициальное отображение («проекция») σ^β_α порождает гомоморфизм $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$ группы $L^r_{K_\beta}$ в группу $L^r_{K_\alpha}$ и гомоморфизм $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$ группы $L^r_{A_\beta}$ в группу $L^r_{A_\alpha}$. Сопряженные гомоморфизмы π^α_β, соответственно $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0}$, определяются равенством $(\pi^\alpha_\beta x^r_\alpha \cdot t^r_{\beta j}) = (x^r_\alpha \cdot \sigma^\beta_\alpha t^r_{\beta j})$ для $x^r_\alpha \in L^r_{K_\alpha}$, $t^r_{\beta j} \in K_\beta$, соответственно $x^r_\alpha \in L^r_{A_\alpha}$, $t^r_{\beta j} \in A_\beta$. Гомоморфизмы $\tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}$ и $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0}$ порождают одноименные гомоморфизмы («проекции») группы $\Delta^r_{A_\beta}$ в $\Delta^r_{A_\alpha}$ и группы $\nabla^r_{A_\alpha}$ в $\nabla^r_{A_\beta}$ и отображают

$$\Delta^r_{A_\beta:K_\beta} \text{ в } \Delta^r_{A_\alpha:K_\alpha}; \quad \nabla^r_{A_\alpha:K_\alpha} \text{ в } \nabla^r_{A_\beta:K_\beta}.$$

Определяем:

(43.2) $$\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} = \varprojlim (\Delta^r_{A_\alpha:K_\alpha} \tilde{\omega}^{\beta 0}_{\alpha 0}); \quad \nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} = \varinjlim (\nabla^r_{A_\alpha:K_\alpha} \pi^{\alpha 0}_{\beta 0}).$$

Замечание 1. Легко непосредственно доказать, что определенные таким образом группы $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$, $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ не зависят от выбора последовательности (43.1), но можно доказать и то, что полученное определение этих групп лишь по форме отличается от примененного к данному частному случаю общего определения гл. III. В самом деле, симплексы A_α характеризуются тем, что их звезды пересекаются в $\mathbf{A}$, поэтому A_α есть не что иное, как нерв покрытия

$$\alpha = \{\mathbf{A} \cap O_{\alpha 1},\ \ldots,\ \mathbf{A} \cap O_{\alpha p}\},$$

где $O_{\alpha 1}, \ldots, O_{\alpha p}$ суть пересекающиеся с $\mathbf{A}$ звезды вершин комплекса K_α. Другими словами, обозначая через $\alpha\lambda$ покрытие $\mathbf{K}$ звездами вершин

комплекса K_α, имеем $\alpha = \mathbf{A}\alpha\lambda$. Покрытия $\alpha\lambda$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, образуют конфинальную часть множества всех покрытий полиэдра $\mathbf{K}$, а проекции $\sigma_\alpha^\beta = \sigma_{\alpha\lambda}^{\beta\lambda}$ ставят в соответствие каждому элементу покрытия $\beta\lambda$ содержащий его элемент покрытия $\alpha\lambda$. Отсюда и из п. 38 следует, что определение (43.2) дает нам те же группы, что и определения главы III.

Замечание 2. Элементами группы $\Delta^r_{\mathbf{A}:K}$ являются те «нити» или последовательности

$$z^r = (\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^r, \ldots, \mathfrak{z}_\alpha^r, \ldots), \quad \mathfrak{z}_\alpha^r \in \Delta^r_{A_\alpha}, \quad \tilde{\omega}_{\alpha 0}^{\beta 0} \mathfrak{z}_\beta^r = \mathfrak{z}_\alpha^r,$$

элементы которых $\mathfrak{z}_\alpha^r \in \Delta^r_{A_\alpha}$ суть классы циклов, ограничивающих на K_α.

Легко доказывается, что группа $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ может быть также определена как фактор-группа группы всех *сходящихся циклов* [см., например, ([5]), стр. 241] множества $\mathbf{A}$ по группе тех из них, которые ограничивают в $\mathbf{K}$.

Элементы группы $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ суть $\mathbf{K}_\nabla$-*классы* r-*мерных* ∇-*циклов*, причем ∇-цикл $z_{\alpha 0}^r$ комплекса A_α и ∇-цикл $z_{\beta 0}^r$ комплекса A_β по определению принадлежат к тому же $\mathbf{K}_\nabla$-классу, если существует такое $\gamma > \alpha, \beta$, что $\pi_{\gamma 0}^{\alpha 0} z_{\alpha 0}^r - \pi_{\gamma 0}^{\beta 0} z_{\beta 0}^r$ есть ∇-цикл комплекса A_γ, продолжаемый на K_γ.

Замечание 3. В этих определениях группы коэффициентов, на основе которых определяются $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ и $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$, двойственны между собою, причем для $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ берется бикомпактная, а для $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ дискретная группа.

44. Группы $\delta^r_{\Gamma:\mathbf{K}}$. Обозначаем через $K_{\alpha 1}$ барицентрическое подразделение комплекса K_α, через K_α^* комплекс всех (открытых) барицентрических звезд комплекса K_α. Каждая барицентрическая звезда $\tau_{\alpha i} \in K_\alpha^*$ есть подкомплекс комплекса $K_{\alpha 1}$.

Барицентрические звезды, соответствующие симплексам комплекса $G_\alpha = K_\alpha \setminus A_\alpha$, образуют *замкнутый* подкомплекс G_α^* комплекса K_α^*. Так как каждый элемент комплекса G_α^* есть подкомплекс комплекса $K_{\alpha 1}$, то множество всех симплексов $K_{\alpha 1}$, «лежащих» на элементах $G_{\alpha 1}$, (т. е. являющихся элементами комплексов $\tau_{\alpha i} \in G_\alpha^*$) есть замкнутый подкомплекс $G_{\alpha 1}^*$ комплекса $K_{\alpha 1}$, называемый барицентрическим подразделением комплекса G_α^*. Полиэдр, составленный из всех симплексов $G_{\alpha 1}^*$, обозначается через P_α. Имеем $P_\alpha \sqsubset \Gamma$ и даже $\Gamma = \bigcup_\alpha P_\alpha$. Без нарушения общности можем предположить, что $P_\alpha \subseteq P_{\alpha+1}$. Поэтому подразделение $G_{\alpha 1}^*$ на симплексы, принадлежащие $K_{\beta 1}$, $\beta > \alpha$, есть подкомплекс $s_{\alpha 1}^{\alpha 1} G_{\alpha 1}$ комплекса $G_{\beta 1}^*$, и для каждой цепи $x_{\alpha 1}^r$ комплекса $G_{\alpha 1}^*$ мы имеем цепь $s_{\beta 1}^{\alpha 1} x_{\alpha 1}^r$ комплекса $G_{\beta 1}^*$ — *подразделение цепи* $x_{\alpha 1}^r$ в $G_{\beta 1}^*$.

Замечание 1. По определению $(s_{\beta 1}^{\alpha 1} x_{\alpha 1}^r \cdot t_{\beta 1}^r) = (x_{\alpha 1}^r \cdot t_{\alpha 1}^r)$, если симплекс $t_{\beta 1}^r$ лежит на $t_{\alpha 1}^r$ и ориентирован так же, как $t_{\alpha 1}^r$ в то время как $(s_{\beta 1}^{\alpha 1} x_{\alpha 1}^r \cdot t_{\beta 1}^r) = 0$, если $t_{\beta 1}^r$ лежит на симплексе $t_{\alpha 1}^s$ размерности $s > r$.

Замечание 2. Таким же образом мы определяем подразделение $s_{\beta 1}^\alpha \overset{*}{x}{}_\alpha^r$ цепи $\overset{*}{x}{}_\alpha^r$ комплекса G_α^*. При этом очевидно $s_{\beta 1}^\alpha \overset{*}{x}{}_\alpha^r = s_{\beta 1}^{\alpha 1} s_{\alpha 1}^\alpha \overset{*}{x}{}_\alpha^r$.

После этих предварительных замечаний мы говорим, что Δ-цикл $z^r_{\alpha 1}$ комплекса $G^*_{\alpha 1}$ и Δ-цикл $z^r_{\beta 1}$ комплекса $G^*_{\beta 1}$ принадлежат к одному и тому же δ-классу z^r на $\mathbf{\Gamma}$, если существует такое $\gamma > \alpha, \beta$, что $s^{\alpha 1}_{\gamma 1} z^r_{\alpha 1} - s^{\beta 1}_{\gamma 1} z^r_{\beta 1}$ ограничивает на $G^*_{\gamma 1}$. Сумму двух δ-классов z^r и z'^r определяем так: берем произвольно $z^r_{\alpha 1} \in z^r$, $z^r_{\beta 1} \in z'^r$ и $\gamma > \alpha, \beta$; тогда δ-класс, содержащий $s^{\alpha 1}_{\gamma 1} z^r_{\alpha 1} + s^{\beta 1}_{\gamma 1} z^r_{\beta 1}$, есть по определению $z^r + z'^r$.

Определение [44.1]. *Дискретная аддитивная группа всех r-мерных δ-классов на $\mathbf{\Gamma}$ называется группой* $\delta^r_{\mathbf{\Gamma}}$ (по данной дискретной области коэффициентов).

Определение [44.2]. *Те δ-классы $z^r \in \delta^r_{\mathbf{\Gamma}}$, элементы $z^r_{\alpha 1} \in z^r$ которых ограничивают на $K_{\alpha 1}$, образуют подгруппу $\delta^r_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$ группы δ^r_{Γ}.*

Замечание 3. Группы $\delta^r_{\mathbf{\Gamma}}$ и $\delta^r_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$ можно было бы определить и следующим образом. Назовем циклом на $\mathbf{\Gamma}$ сходящийся цикл какого-либо компакта $\Phi \subset \mathbf{\Gamma}$; цикл на $\mathbf{\Gamma}$ ограничивает на $\mathbf{\Gamma}$, если он ограничивает на каком-нибудь компакте $\Phi' \subset \mathbf{\Gamma}$. Фактор-группа всех r-мерных циклов на $\mathbf{\Gamma}$ по подгруппе циклов, ограничивающих на $\mathbf{\Gamma}$, называется группой $\delta^r_{\mathbf{\Gamma}}$; подгруппа группы δ^r_{Γ}, состоящая из классов, элементы которых ограничивают на $\mathbf{K}$, есть группа $\delta_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$. Область коэффициентов при этом дискретна.

§ 13. Общий закон двойственности Александера-Понтрягина: редукция к комбинаторной лемме

45. Формулировка общей теоремы Александера-Понтрягина и комбинаторной леммы. Общий закон двойственности Александера-Понтрягина утверждает *двойственность групп* $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ *и* $\delta^{n-r-1}_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$:

(45.1) $$\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} \mid \delta^{n-r-1}_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$$

(взятых по двойственным областям коэффициентов) или, что то же самое, *изоморфизм групп* $\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$ и $\delta^{n-r-1}_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$:

(45.2) $$\nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} \approx \delta^{n-r-1}_{\mathbf{\Gamma}:\mathbf{K}}$$

(взятых по одной и той же дискретной области коэффициентов). Из этих двух эквивалентных (в силу двойственности $\Delta^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}} \mid \nabla^r_{\mathbf{A}:\mathbf{K}}$) формулировок докажем вторую. Доказательство опирается на следующую лемму:

Комбинаторная лемма [45.3]. *Если z^p_α есть ∇-цикл на K_α, равный нулю на A_α, то для любого $\beta > \alpha$ имеем*

(45.3) $$s^{\beta}_{\beta 1} D^q_\beta \pi^\alpha_\beta z^p_\alpha \sim s^\alpha_{\beta 1} D^q_\alpha z^p_\alpha \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1}$$

[здесь $\sim$ есть знак гомологии (см. п. 9), а D^q есть оператор, определенный в п. 42, $q = n - p$].

Эта лемма будет доказана в следующем параграфе. В настоящем параграфе мы докажем изоморфизм (45.2), предполагая лемму [45.3] доказанной.

46. Операторы $\Delta D^q_\alpha E_\alpha$ и изоморфизм $\Delta D^q E$. Мы пишем E_α вместо $E^{A_\alpha}_{K_\alpha}$ и p вместо r, q вместо $n-p$. Каждому ∇-циклу $z^p_{\alpha 0}$ комплекса A_α соответствует ∇-цикл $\nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0}$ комплекса G_α и, следовательно, Δ-цикл

$$D^{q-1}_\alpha \nabla E_\alpha z^q_{\alpha 0} = (-1)^{p+1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0}$$

комплекса G^*_α, ограничивающий на K^*_α. Если ∇-цикл z^p_α комплекса G_α ограничивает на G_α цепь x^{p-1}_α, то $D^q_\alpha z^p_\alpha$ ограничивает на G^*_α цепь $\pm D^{q+1}_\alpha x^{p-1}_\alpha$ и обратно. Отсюда, пользуясь п. 15 (гл. 1), получаем:

[46.1]. Оператор $\Delta D^q_\alpha E_\alpha$ производит изоморфизм группы $\nabla^p_{A_\alpha:K_\alpha}$ на группу $\Delta^{q-1}_{G^*_\alpha:K^*_\alpha}$.

Наша задача — доказать, что *операторы $\Delta D^q_\alpha E_\alpha$, взятые для различных α, порождают единый гомоморфизм* — назовем его $\Delta D^q E$ — *группы $\nabla^p_{A:K}$ в $\delta^{q-1}_{\Gamma:K}$, и что этот гомоморфизм $\Delta D^q E$ есть изоморфизм группы $\Delta^p_{A:K}$ на группу $\delta^{q-1}_{\Gamma:K}$.*

Для этого докажем прежде всего две леммы.

ЛЕММА [46.2]. *Для каждого ∇-цикла $z^p_{\alpha 0}$ комплекса A_α и $\beta > \alpha$ имеем:*

$$\pi^\alpha_\beta \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G_\beta. \tag{46.2}$$

Доказательство. Так как π^α_β коммутирует с ∇, то подлежащая доказательству гомология (46.2) может быть записана в виде

$$\nabla \pi^\alpha_\beta E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G_\beta$$

или в виде

$$\nabla(\pi^\alpha_\beta E_\alpha z^p_{\alpha 0} - E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}) \sim 0 \quad \text{на} \quad G_\beta.$$

Но непосредственное вычисление показывает, что цепь $\pi^\alpha_\beta E_\alpha z^p_{\alpha 0} - E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}$ равна нулю на A_β, т. е. есть цепь комплекса G_β, чем лемма [46.2] доказана.

ЛЕММА [46.3]. *Для любого ∇-цикла $z^p_{\alpha 0}$ комплекса A_α и $\beta > \alpha$ имеем:*

$$s^\beta_{\beta 1} \Delta D^q_\beta E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \sim s^\alpha_{\beta 1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1}. \tag{46.3}$$

Доказательство: Подставляем в (45.3) $z^{p+1}_\alpha = \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0}$ вместо z^p_α. Получаем

$$s^\beta_{\beta 1} D^{q-1}_\beta \pi^\alpha_\beta \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim s^\alpha_{\beta 1} D^{q-1}_\alpha \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1}. \tag{46.31}$$

Действуем на обе стороны гомологии (46.2) оператором D^{q-1}_β. Получаем

$$D^{q-1}_\beta \pi^\alpha_\beta \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim D^{q-1}_\beta \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_\beta.$$

Таким образом в левой части (46.3) можем заменить $D^{q-1}_\beta \pi^\alpha_\beta \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0}$ через $D^{q-1}_\beta \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^{p\alpha}_{\alpha 0}$, что дает

$$s^\beta_{\beta 1} D^{q-1}_\beta \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \sim s^\alpha_{\beta 1} D^{q-1}_\alpha \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1}. \tag{46.32}$$

Но в силу (42.1) имеем

$$D^{q-1}_\beta \nabla E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^{p\alpha}_{\alpha 0} = (-1)^{p+1} \Delta D^q_\beta E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0},$$

$$D^{q-1}_\alpha \nabla E_\alpha z^p_{\alpha 0} = (-1)^{p+1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0}.$$

Если подставим это в (46.32), получим (46.3).

Теперь легко доказать, что гомоморфизмы $\Delta D^q_\alpha E_\alpha$, взятые для различных α, сливаются в единый гомоморфизм $\Delta D^q E$ группы $\nabla^p_{A:K}$ в $\delta^{q-1}_{\Gamma:A}$; так как все циклы вида $\Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0}$ ограничивают на K^*_α, то для этого достаточно доказать предложение:

ЛЕММА [46.4]. *Если для ∇-цикла $z^p_{\alpha 0}$ комплекса A_α и ∇-цикла $z^p_{\beta 0}$ комплекса A_β существует такое $\gamma > \alpha, \beta$ что $\pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^p_{\alpha 0} - \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^p_{\beta 0}$ есть продолжаемый цикл, то*

$$(46.4) \qquad s^\alpha_{\gamma 1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim s^\beta_{\gamma 1} \Delta D^q_\beta E_\beta z^p_{\beta 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\gamma 1}.$$

Доказательство. Из (46.1) следует, что $\Delta D^q_\gamma E_\gamma (\pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^p_{\alpha 0} - \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^p_{\beta 0}$ ограничивает на G^*_γ, т. е.

$$(46.41) \qquad s^\gamma_{\gamma 1} \Delta D^q_\gamma E_\gamma \pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^p_{\alpha 0} \sim s^\gamma_{\gamma 1} \Delta D^q_\gamma E_\gamma \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^p_{\beta 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\gamma 1}.$$

С другой стороны, (46.3) дает при замене β на γ

$$s^\gamma_{\gamma 1} \Delta D^q_\gamma E_\gamma \pi^{\alpha 0}_{\gamma 0} z^p_{\alpha 0} \sim s^\alpha_{\gamma 1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\gamma 1},$$

а при замене α, β через β, γ:

$$s^\gamma_{\gamma 1} \Delta^q_\gamma E_\gamma \pi^{\beta 0}_{\gamma 0} z^p_{\beta 0} \sim s^\beta_{\gamma 1} \Delta D^q_\beta E_\beta z^p_{\beta 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\gamma 1}.$$

Эти гомологии, подставленные в (46.41), дают (46.4).

[45.6]. Гомоморфизм $\Delta D^q E$ группы $\nabla^p_{A:K}$ в группу $\delta^{q-1}_{\Gamma:K}$ есть изоморфизм.

Для доказательства достаточно показать:

[46.51] Если для ∇-цикла $z^p_{\alpha 0}$ комплекса A_α и некоторого $\beta > \gamma$ имеем

$$s^\alpha_{\beta 1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim 0 \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1},$$

то ∇-цикл $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}$ есть продолжаемый цикл.

Доказательство. В силу (46.3) имеем

$$s^\alpha_{\beta 1} \Delta D^q_\alpha E_\alpha z^p_{\alpha 0} \sim s^\beta_{\beta 1} \Delta D^q_\beta E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0} \quad \text{на} \quad G^*_{\beta 1},$$

поэтому $s^\beta_{\beta 1} \Delta D^q_\beta E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}$ ограничивает на $G^*_{\beta 1}$. Известно [см., например, ([4]), стр. 247, теорема III]: если цикл вида $s^\beta_{\beta 1} z^*_\beta$, где z^*_β есть Δ-цикл комплекса G^*_β, ограничивает на $G^*_{\beta 1}$, то z^*_β ограничивает на G^*_β.

Поэтому $\Delta D^q_\beta E_\beta \pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}$ ограничивает на G^* и ∇-цикл $\pi^{\alpha 0}_{\beta 0} z^p_{\alpha 0}$ в силу [46.1] есть продолжаемый цикл.

[46.6]. Изоморфизм $\Delta D^q E$ отображает $\nabla^p_{A:K}$ на $\delta^{q-1}_{\Gamma:K}$.

Пусть $z^{q-1} \in \delta^{q-1}_{\Gamma:K}$. Известно [см. например, ([4]), стр. 246, теорема II]: всякий Δ-цикл комплекса $G^*_{\alpha 1}$ гомологичен на $G^*_{\alpha 1}$ некоторому циклу вида $s^\alpha_{\alpha 1} z^*_\alpha$, где z^*_α есть Δ-цикл комплекса G^*_α. Поэтому δ-класс z^{q-1} содержит цикл $z^{q-1}_{\alpha 1}$ вида $s^\alpha_{\alpha 1} z^*_\alpha$, где z^*_α есть Δ-цикл комплекса G^*, *ограничивающий на* K^*_α (так как всякий $z^{q-1}_{\alpha 1} \in z^{q-1}$ ограничивает на $K_{\alpha 1}$).

Из [46.1] следует, что существует ∇-цикл $z^p_{\lambda 0}$ комплекса A_* такой, что

$$\Delta D^q_\lambda E_\alpha z^p_{\lambda 0} \sim z^*_\lambda \quad \text{на} \quad G^\lambda_\alpha$$

и поэтому $s^\alpha_{\alpha 1} \Delta D^q_\lambda E_\alpha z^p_\alpha \in z^{q-1}$, что и требовалось доказать.

§ 14. Доказательство комбинаторной леммы [45.3]

47. Основное тождество. В этом параграфе мы обозначаем неориентированные симплексы через T, а ориентированные через t. Симплекс $T^r_{\alpha 1}$ комплекса $K_{\alpha 1}$, имеющий своими вершинами центры тяжести симплексов $T^{n_0}_\alpha > T^{n_1}_\alpha > \cdots > T^{n_r}_\alpha$ обозначается через

$$T^r_{\alpha 1} = |T^{n_0}_\alpha > \cdots > T^{n_r}_\alpha|.$$

Симплекс $T_{\alpha 1} \in K_{\alpha 1}$ называется главным, если содержащая его барицентрическая звезда («носитель» симплекса $T^p_{\alpha 1}$ в K^*_α) имеет размерность, равную размерности $T_{\alpha 1}$. Среди симплексов $K_{\alpha 1}$ главные симплексы, и только они имеют вид

$$T^q_{\alpha 1} = |T^n_\alpha > T^{n-1}_\alpha > \cdots > T^p_\alpha|.$$

Если мы поставим в соответствие центру тяжести каждого симплекса $T_\beta \in K_\beta$ центр тяжести симплекса $\sigma^\beta_\alpha T_\beta \in K_\alpha$, то мы получим симплициальное отображение, обозначаемое через $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}$, комплекса $K_{\beta 1}$ в $K_{\alpha 1}$: симплексу $T^r_{\beta 1} = |T^{n_0}_\beta > \cdots > T^{n_r}_\beta| \in K_{\beta 1}$ соответствует симплекс

$$\sigma^{\beta 1}_{\gamma 1} T^r_{\beta 1} = |\sigma^\beta_\alpha T^{n_0}_\beta \geqslant \sigma^\beta_\alpha T^{n_1}_\beta \geqslant \cdots \geqslant \sigma^\beta_\alpha T^{n_r}_\beta| \in K_{\alpha 1}.$$

Замечание I. Если отображение σ^β_α не вырождается на T^n_β, т. е. если симплекс $\sigma^\beta_\alpha T^n_\beta$ имеет размерность n, то для любого главного симплекса $T^q_{\beta 1}$, лежащего на T^n_β, симплекс $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} T^q_\beta$ является образом симплекса $T^q_{\beta 1}$ при аффинном отображении σ^β_α симплекса T^n.

Выберем определенную ориентацию многообразия **K** и, следовательно, комбинаторных многообразий K_α и K_β. Соответствующие ориентации всех n-мерных симплексов $T^n_\alpha \in K_\alpha$ и $T^n_\beta \in K_\beta$ обозначим соответственно через t^n_α и t^n_β. Для всякого $T^p_\alpha \in K_\alpha$, $p < n$ выберем по произволу одну из двух ориентаций и обозначим ее через t^p_α. После этого ориентацию τ^q_α барицентрической звезды $\overset{*}{T}{}^q_\alpha$, соответствующей симплексу $\overset{*}{T}{}^p_\alpha$ выбираем так, чтобы было $(t^p_\alpha \times \tau^q_\alpha) = +1$. Для всех симплексов $T^q_{\alpha 1} \in T^q_\alpha$ обозначим через $t^q_{\alpha 1}$ ориентации, одинаковые с выбранной ориентацией τ^q_α звезды $\mathbf{T}^q_\alpha$.

Ориентации t^p_β симплексов $T^p_\beta \in K$, $p < n$, выбираем следующим образом. Если σ^β_α не вырождается на T^p_β, $\sigma^\beta_\alpha T^p_\beta = T^p_\alpha$, то определяем ориентацию t^p_β равенством $\sigma^\beta_\alpha t^p_\beta = t^p_\alpha$. Если же σ^β_α вырождается на T^p_β, обо-

значим через t^p_β произвольную ориентацию T^p_β. Ориентация τ^q_β барицентрической звезды $\overset{\bullet}{T}{}^q_\beta$, соответствующей симплексу T^p_β, определяется снова условием $(t^p_\beta \times \tau^q_\beta) = +1$.

Доказательство комбинаторной леммы [45.3] основывается на следующем *основном тождестве*

(47.1) $$\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}\, s^{\beta}_{\beta 1}\, D^q_\beta \pi^{\alpha}_{\beta} x^p_\alpha = s^{\alpha}_{\alpha 1}\, D^q_\alpha x^p_\alpha,$$

для любой цепи x^p_α комплекса K_α и любого $\beta > \alpha$.

Замечание 2. Рассматриваемое здесь отображение σ^β_α имеет по самому своему определению (п. 41) степень 1. Если σ^β_α есть произвольное симплициальное отображение произвольного n-мерного ориентируемого многообразия K_β на произвольное n-мерное ориентируемое многообразие K_α, то имеет место более общее тождество

(47.2) $$\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}\, s^{\beta}_{\beta 1}\, D^q_\beta \pi^{\alpha}_{\beta} x^p_\alpha = d s^{\alpha}_{\alpha 1}\, D^q_\alpha x^p_\alpha$$

для любой цепи x^p_α комплекса K_α, где d есть степень отображения, а оператор π^α_β определяется равенством $(\pi^\alpha_\beta\ x^p_\alpha \cdot t^p_\beta) = (x^p_\alpha \cdot \sigma^\beta_\alpha\ t^p_\beta)$. В этом общем виде тождество (47.2) выражает не что иное, как одно из основных свойств Hopf'ова обратного гомоморфизма к отображению σ^p_α [см., например, (7)].

Доказательство, которое мы даем ниже, охватывает общий случай (47.2).

48. Доказательство основного тождества. Посмотрим, что происходит при отображении $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}$ с главными симплексами комплекса $K_{\beta 1}$.

Прежде всего:

[48.1]. Если не главный симплекс $T^q_{\alpha 1} = |T^{n_0}_\alpha > \cdots > T^{n_q}_\alpha|$ является при отображении $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}$ образом главного симплекса $T^q_{\beta 1} = |T^n_\beta > \cdots > T^p_\beta|$ той же размерности q, то $n_q < q$.

В самом деле, $\sigma^\beta_\alpha T^{n-i}_\beta = T^{n_i}_\alpha$, значит, $n_i \leqslant n - i$, в частности, $n_0 \leqslant n$, $n_q \leqslant p$. Если бы было $n_q = p$, симплекс $T^q_{\alpha 1}$ был бы главным, чем [48.1] доказано.

С другой стороны, легко видеть, что главные симплексы $T^q_{\beta 1} = |T^n_\beta > \cdots > T^p_\beta| \in K_{\beta 1}$, отображающиеся посредством $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}$ на данный главный симплекс $T^q_{\alpha 1} = |T^n_\alpha > \cdots > T^p_\alpha| \in K_{\alpha 1}$, находятся во взаимнооднозначном соответствии с n-мерными симплексами $T^n_\beta \in K_\beta$, отображающимися посредством σ^β_α на T^n_α. Более того, сделанный нами выбор ориентаций t^n_α, t^n_β, t^p_α, t^p_β, $t^q_{\alpha 1}$, $t^q_{\beta 1}$ таков, что из $\sigma^\beta_\alpha t^n_\beta = \varepsilon t^n_\alpha$ (где $\varepsilon = \pm 1$) следует $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} t^q_{\beta 1} = \varepsilon t^q_{\alpha 1}$ (легкое доказательство этого факта пользуется замечанием 1 п. 47). Поэтому *коэффициент, с которым главный симплекс $t_{\alpha 1}$ входит в $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} \Sigma t^q_{\beta 1}$* (суммирование по всем главным q-мерным симплексам $T^q_{\beta 1} \in K_{\beta 1}$), *равен коэффициенту, с которым t^n_α входит в $\sigma^\beta_\alpha \sum t^n_\beta$* (суммирование по всем n-мерным симплексам $T^n_\beta \in K_\beta$), *т. е*

степени отображения σ^{β}_{α}. Другими словами

$$(48.2) \qquad \sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} \sum t^q_{\beta 1} = d \sum t^q_{\alpha 1}$$

(суммирование на обеих сторонах по всем q-мерным главным симплексам соответственно K_β и K_α).

Теперь доказательство основного тождества легко доводится до конца. Для простоты полагаем

$$y^q_{\beta 1} = s^{\beta}_{\beta 1} D^q_{\beta} \pi^{\alpha}_{\beta} x^p_{\alpha}.$$

Вычислим значение цепи $y^q_{\beta 1}$ на произвольном $t^q_{\beta 1} \in K$. Если $t^q_{\beta 1}$ не главный симплекс, то $(y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\beta 1}) = 0$ по самому определению оператора $s^{\beta}_{q 1}$. Пусть $t^q_{\beta 1}$ — главный симплекс, τ — несущая его барицентрическая звезда и t^p_{β} — соответствующий ей симплекс K_β. По определению $s^{\beta}_{\beta 1}$, D^q_{β}, π^{α}_{β} имеем

$$(48.3) \qquad (y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\alpha 1}) = (x^p_{\alpha} \cdot \sigma^{\beta}_{\alpha} t^p_{\beta}).$$

Для вычисления левой стороны тождества (47.2) берем $T^q_{\alpha 1} \in K_\alpha$ и все главные симплексы $T^q_j = |T^n_{\beta}(j) > \cdots > T^p_{\beta}(j)| \in K_{\beta 1}$, $j = 1, 2, \ldots$, отображающие посредством $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1}$ на $T^q_{\alpha 1}$. Пусть $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} t^q_j = \varepsilon_j t^q_{\alpha 1}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$; в силу (48.3) и определения чисел ε_j имеем

$$(48.4) \qquad (\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\alpha 1}) = \sum_j (y^q_{\beta 1} \cdot \varepsilon_j t^q_j) = \sum_j \varepsilon_j [x^p_{\alpha} \cdot \sigma^{\beta}_{\alpha} t^p_{\beta}(j)].$$

Теперь, если $T^q_{\alpha 1}$ не главный симплекс, то по (48.1) имеем $n_q < p$; так как $\sigma^{\beta}_{\alpha} T^p_{\beta}(j) = T^{n_q}_{\alpha}$, то $[x^p_{\alpha} \cdot \sigma^{\beta}_{\alpha} t^p_{\beta}(j)] = 0$, значит вследствие (48.4)

$$(\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\alpha 1}) = 0.$$

Так как очевидно $(s^{\alpha}_{\alpha 1} D^q_{\alpha 1} x^p_{\alpha} \cdot t^q_{\alpha 1}) = 0$, то обе стороны равенства (47.2) принимают на $t^q_{\alpha 1}$ значение нуль.

Если же $T^q_{\alpha 1}$ — главный симплекс $T^q_{\alpha 1} = |T^n_{\alpha} > \cdots > T^p_{\alpha}|$, то $\sigma^{\beta}_{\alpha} T^p_{\beta}(j) = T^p_{\alpha}$ и даже $\sigma^{\beta}_{\alpha} t^p_{\beta}(j) = t^p_{\alpha}$, так что в силу (48.4)

$$(\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\alpha 1}) = \sum_j \varepsilon_j (x^p_{\alpha} \cdot t^p_{\alpha}) = (x^p_{\alpha} \cdot t^p_{\alpha}) \sum_j \varepsilon_j.$$

Но в силу (48.2) имеем $\sum_j \varepsilon_j = d$, так что $(\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} y^q_{\beta 1} \cdot t^q_{\alpha 1}) = d\,(x^p_{\alpha} \cdot t^p_{\alpha})$.

Это—для левой стороны (47.2). Что же касается правой, то $s^{\alpha}_{\alpha 1} D^q_{\alpha} x^p_{\alpha}$ принимает на $t^q_{\alpha 1}$ значение $(x^p_{\alpha} \cdot t^p_{\alpha})$, так что тождество (47.2) полностью доказано.

49. Окончание доказательства леммы [45.3] требует следующих двух элементарных предложений:

[49.1]. Пусть $\tilde{G}_\alpha$, $\tilde{G}^*_{\alpha 1}$ соответственно обозначает теоретико-множественную сумму всех симплексов комплекса G_α, $G^*_{\alpha 1}$. Существует непрерывное отображение C множества $\tilde{G}_\alpha$ на $\tilde{G}^*_{\alpha 1}$, оставляющее неподвижными все точки $\tilde{G}_{\alpha 1}$.

[49.2]. Пусть ∇-цикл z^p_α комплекса K_α равен нулю на A_α. Если $z^q_{\beta 1} = s^\beta_{\beta 1} D^q_\beta \pi^\alpha_\beta z^p_\alpha$ отлично от нуля на некотором симплексе $T^q_{\beta 1} \in K_{\beta 1}$, то существует выпуклое подмножество множества $\tilde{G}_\alpha$, содержащее замыкания обоих симплексов $T^q_{\beta 1}$ и $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} T^q_{\beta 1}$.

Доказательство [49.1]. Открытое множество $\tilde{G}_\alpha$ есть теоретико-множественная сумма лежащих на нем симплексов $T_{\alpha 1} \in K_{\alpha 1}$. Каждый из симплексов $T_{\alpha 1} \in K_{\alpha 1}$, лежащих на $\tilde{G}_\alpha$, но не являющихся элементами комплекса $G^*_{\alpha 1}$, имеет вид:

$$T^r_{\alpha 1} = |T^{n_0}_\alpha > \ldots > T^{n_i}_\alpha > \ldots > T^{n_r}_\alpha|,$$

где $T^{n_0}_\alpha, \ldots, T^{n_i}_\alpha$ являются элементами G_α, а $T^{n_i+1}_\alpha, \ldots, T^{n_r}_\alpha$ суть элементы A_α. Поэтому каждая точка $p \in T^r_{\alpha 1}$ лежит на вполне определенном отрезке $|p'p''| \subseteq T^r_{\alpha 1}$, соединяющем некоторую точку p' симплекса $T'_{\alpha 1} = |T^{n_0}_\alpha > \ldots > T^{n_i}_\alpha| \ni G^*_{\alpha 1}$ с некоторой точкой p'' симплекса $T''_{\alpha 1} = |T^{n_i+1}_\alpha > \ldots > T^{n_r}_\alpha|$, являющегося элементом барицентрического подразделения $A_{\alpha 1}$ комплекса A_α. Если мы положим $C(p) = p'$, определяя C на $G_{\alpha 1}$ в качестве тождественного отображения, мы получим искомое непрерывное отображение $\tilde{G}_\alpha$ на $\tilde{G}^*_{\alpha 1}$.

Доказательство [49.2]. Если T^n — какой-нибудь симплекс, T^p — какая-нибудь грань симплекса T^n, то мы обозначаем через $O(T^p, T^n)$ комплекс, состоящий из всех симплексов T^r, удовлетворяющих условию $T^n \geqslant T^r \geqslant T^p$ (где неравенство $T' > T''$, как всегда, означает, что симплекс T'' есть грань симплекса T'). Через $\tilde{O}(T^p, T^n)$ обозначаем теоретико-множественную сумму всех симплексов комплекса $O(T^p, T^n)$. Точки множества $\tilde{O}(T^p, T^n)$ характеризуются среди всех точек замкнутого симплекса $\overline{T^n}$ тем, что их барицентрические координаты, соответствующие вершинам симплекса T^p (в системе барицентрических координат, определенной всеми вершинами T^n), положительны; поэтому *множество* $\tilde{O}(T^p, T^n)$ *выпукло*. Это простое замечание мы и применим к доказательству предложения [49.2]. Из условий этого предложения следует, что $T^q_{\beta 1}$ есть главный симплекс

$$T^q_{\beta 1} = |T^n_\beta > \ldots > T^p_\beta|$$

и что $\pi^\alpha_\beta z^p_\alpha$ отлично от нуля на T^p_β. Поэтому $\sigma^\beta_\alpha T^p_\beta = T^p_\alpha \in G_\alpha$.

Обозначим через T^n_α носитель симплекса T^n_β в K_α и пусть $\sigma^\beta_\alpha T^n_\beta = T^{n_0}_\alpha$. По определению σ^β_α имеем $T^{n_0}_\alpha \leqslant T^n_\alpha$, и, значит,

$$T^p_\alpha = \sigma^\beta_\alpha T^p_\beta \leqslant T^n_\alpha.$$

Так как $T^p_\alpha \in G_\alpha$ и G_α есть открытый подкомплекс комплекса K_α, то

$$O(T^p_\alpha, T^{n_0}_\alpha) \subseteq O(T^p_\alpha, T^n_\alpha) \subseteq G_\alpha.$$

Вершины симплекса $\sigma^{\beta 1}_{\alpha 1} T^q_{\beta 1}$ суть центры тяжести симплексов

$$T^{n_0}_\alpha = \sigma^\beta_\alpha T^n_\beta \geqslant \sigma^\beta_\alpha T^{n-1}_\beta \geqslant \ldots \geqslant \sigma^\beta_\alpha T^p_\beta = T^p_\alpha;$$

они являются поэтому точками множества $\tilde{O}(T_\alpha^p, T_\alpha^{n_0}) \subseteq O(T_\alpha^p, T_\alpha^n)$. Так как $O(T_\alpha^p, T_\alpha^n)$ — выпуклое множество, то, содержа вершины симплекса $\sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} T_{\beta 1}^q$, оно содержит и его замыкание. Остается доказать, что во множестве $O(T_\alpha^p, T_\alpha^n)$ содержится и замыкание симплекса $T_{\beta 1}^q$. Пусть $T_\alpha^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, q$ есть носитель симплекса T_β^{n-i} в комплексе K_α. Тогда, помня, что T_α^n есть носитель симплекса T_β^n, и что $T_\alpha^p = \sigma_\alpha^\beta T_\beta^p \leqslant T_\alpha^{n_q}$, имеем

$$T_\alpha^n \geqslant T_\alpha^{n_1} \geqslant \ldots \geqslant T_\alpha^{n_q} \geqslant T_\alpha^p,$$

откуда следует, что симплексы $T_\alpha^n, T_\alpha^{n_1}, \ldots, T_\alpha^{n_q}$, а значит и центры тяжести симплексов $T_\beta^n \subseteq T_\alpha^n$, $T_\beta^{n-1} \subseteq T_\alpha^{n_1}, \ldots, T_\beta^p \subseteq T_\alpha^{n_q}$ лежат в $O(T_\alpha^p, T_\alpha^n)$. Так как $O(T_\alpha^p, T_\alpha^n)$ — выпуклое множество, то оно содержит и замыкание симплекса $T_{\beta 1}^q = | T_\beta^n > T_\beta^{n-1} > \ldots > T_\beta^p |$, чем предложение [49.2] доказано.

Доказательство леммы [45.3] заканчивается теперь следующим образом.

Из [49.2] следует, что призма, построенная на цепях $z_{\beta 1}^q$ и $\sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} z_{\beta 1}^q$ (см. п. 28), лежит на полиэдре $\Pi \subseteq \tilde{G}_\alpha$ (построенном из симплексов этой призмы) и, следовательно, $z_{\beta 1}^q \sim \sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} z_{\beta 1}^q$ на $\Pi \subseteq \tilde{G}_Q$ (гомология понимается здесь в инвариантном смысле либо как непрерывная гомология в смысле ([4]), стр. 335, либо как гомология между сходящимися циклами ([5]), стр. 240, 241).

Итак, подставляя значение $z_{\beta 1}^q$ из [49.2], имеем

$$s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p \sim \sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p \quad \text{на } \Pi \subseteq \tilde{G}_\alpha \subseteq \tilde{G}_\beta. \tag{49.3}$$

С другой стороны, из основного тождества (47.1) имеем

$$s_{\alpha 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p = \sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p,$$

так что цикл $s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p$ лежит (в качестве непрерывного или сходящегося цикла) на Π и, следовательно,

$$s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p = s_{\beta 1}^{\alpha 1} s_{\alpha 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p \sim s_{\alpha 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p \quad \text{на } \Pi.$$

Поэтому мы можем в (49.3) заменить цепь $\sigma_{\alpha 1}^{\beta 1} s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p$ через $s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p$, что дает

$$s_{\beta_1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p \sim s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p \quad \text{на } \Pi \subseteq \tilde{G}_\beta.$$

Отображение C леммы (49.1) переводит эту гомологию в

$$s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p \sim s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p \quad \text{на } \tilde{G}_{\beta 1}^*,$$

следовательно,

$$s_{\beta 1}^{\beta} D_\beta^q \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p \sim s_{\beta 1}^{\alpha} D_\alpha^q z_\alpha^p \quad \text{на } G_{\beta 1}^*,$$

чем и закончено доказательство как комбинаторной леммы, так и общего закона двойственности Аександера-Понтрягина.

§ 15. Теорема о снятии цикла

50. Теорема о снятии цикла в случае многообразия K легко получается, если, сохраняя все обозначения § 13, помнить, что ∇-цикл z_α^p комплекса K_α тогда и только тогда гомологичен на K_α некоторому циклу комплекса G_α, если Δ-цикл $D_\alpha^q z_\alpha^p$ гомологичен на K_α^* некоторому циклу комплекса G_α^*. Так как скалярное произведение z_α^p с каким-либо Δ-циклом $z_{\alpha 0}^p$ комплекса A_α равно индексу пересечения $D_\alpha^q z_\alpha^p$ и $z_{\alpha 0}^p$, можем сформулировать теорему о снятии так:

[50.1]. *Данный q-мерный Δ-цикл n-мерного ориентируемого замкнутого многообразия* **K** *тогда и только тогда гомологичен на* **K** *циклу множества* $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{A}$ (*где* **A** *замкнуто в* **K**), *если его индекс пересечения со всяким p-мерным Δ-циклом замкнутого множества* **A** *равен нулю. При этом область коэффициентов X для циклов на* **K** *и* **Γ** *берется дискретная* (*или* $\mathfrak{R}$), *а для циклов на* **A** — *бикомпактная* $\Xi | X$ (*или* $\mathfrak{R}$).

В этой формулировке мы можем либо понимать под Δ-циклами сходящиеся циклы, либо уточнить самую формулировку следующим образом:

[50.2]. Для того, чтобы δ-класс z^q многообразия **K** содержал в качестве подмножества некоторый δ-класс открытого множества **Γ**, необходимо и достаточно, чтобы для всякой нити $\mathfrak{z}_0^p = \{\mathfrak{z}_{\alpha 0}^p\} \in \Delta_p$ и $z_\alpha^q \in z^q$, $z_{\alpha 0}^p \in \mathfrak{z}_{\alpha 0}^p$ индекс пересечения $(z^p \times z_\alpha^q)$ равнялся нулю.

Можно без труда перефразировать в установленном здесь смысле и другие утверждения таблицы (14.1) для случая многообразия; это предоставляется сделать читателю.

Математический Институт
Академии Наук СССР

Поступило
1 VI 1942

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Общая теория гомологии, Ученые Записки Московск. гос. университета, вып. 45 (1940), 1 — 60.
2. Александров П. С. а) Основные гомологические построения для общих проекционных спектров; б) Закон двойственности для проекционных спектров и локально бикомпактных пространств, Сообщения Академии наук Грузинской ССР, 2 (1941), 213 — 219, 315 — 319.
3. Александров П. С. Вывод закона двойственности Александера—Понтрягина из закона двойственности Колмогорова, Сообщения Грузинского филиала Академии наук СССР, 1 (1940), 401 — 410.
4. Alexandroff P., — Hopf H., Topologie I, 1935.
5. Alexandroff P., Hopf H., Pontrjagin L., Über den Brouwerschen Dimensionsbegriff, Compositio math., 4 (1935), 239 — 255.
6. Bockstein M., Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Матем. сб., 9 (1941), 365 — 376.
7. Freudenthal H., Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus, Annals of math., 38 (1927), 847 — 853.
8. Kolmogoroff A., Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, Матем. сб., 1 (1936), 97 — 102.
9. Lefschetz S., On closed sets on a manifold, Annals of math., 29 (1928), 232 — 254.

10. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы, ГОНТИ, Ред. техн.-теорет. лит., М.-Л., 1938.
11. Pontrjagin L., Zum Alexanderschen Dualitätssatz II, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen (1927), 446 – 456.
12. Зейферт и Трельфалль, Топология, ГОНТИ, Ред. техн.-теорет. лит., М.-Л., 1938.
13. Steenrod N. E., On universal homology groups, Amer. Journ. of math., 48 (1936), 661 — 701.
14. Tucker A. W., An abstract approach to manifolds, Annals of math., 34 (1933), 191 – 243.

P. ALEXANDROFF. ON HOMOLOGICAL SITUATION PROPERTIES OF COMPLEXES AND CLOSED SETS

SUMMARY

We denote by Δ_K^r, ∇_K^r the r-dimensional lower (upper) Betti group of K. Let A be a closed subcomplex of the cell complex K and G—the open complement $K \setminus A$. For a chain x on A (on G) we denote by $E_K^A x$ (by $E_K^G x$) the trivial extension of x over K, i. e. the chain on K equal to x on A (on G) and equal to zero on G (on A).

The operators E_K^A, E_K^G generate the extension homomorphisms:

$$E_K^A \text{ of } \Delta_A^r \text{ into } \Delta_K^r;\; E_K^G \text{ of } \nabla_G^r \text{ into } \nabla_K^r.$$

For a chain x on K we denote by $\mathbf{I}_A^K x$ (by $\mathbf{I}_G^K x$) the chain on A (on G) taking on the cells of A (of G) the same values as x. The operators $\mathbf{I}_A^K$, $\mathbf{I}_G^K$ generate the intersection homomorphisms: $\mathbf{I}_A^K$ of ∇_K^r into ∇_A^r; $\mathbf{I}_G^K$ of Δ_K^r into Δ_G^r.

If F is any homomorphism of the group X into the group Y, we denote by $FX = Y_1 \subseteq Y$ the image of X under F, by $X_0 = F^{-1}0_y$ the kernel of the homomorphism F and use the picture

$$\frac{X \supseteq X_0}{Y \supseteq Y_1}.$$

Now we define the groups Δ_{KA}^s, ∇_{KG}^r, $\Delta_{A:K}^r$ etc. as images under and kernels of the extension and intersection homomorphisms according to the formulas (12.1) — (12.3). Then the so defined «groups of the figure K, A, G» are subject of the relations (14.1) — (14.3) where the lines indicate dualities in the sense of Pontrjagin and the orthogonality sign $\perp$ means annihilations.

These results established in Chapter I for complexes are generalized in Chapter III for an arbitrary locally bicompact normal space K, its closed subset A and the complement $G = K \setminus A$. This generalization grounds on an approximation process are developed in Chapter II. Chapter IV deals with manifolds and gives an elementary proof of the Alexander—Pontrjagin duality theorem in its most general form.

Наша страна встречает двадцать пятую годовщину Великой Октябрьской социалистической революции в условиях отечественной войны против злейшего врага человечества—гитлеризма.

Четверть века прошло с тех пор, когда, под руководством коммунистической партии и ее великих вождей Ленина и Сталина, рабочий класс в союзе с крестьянством сбросил в России власть капиталистов и помещиков. В огне глубочайшей революции родилось первое в мире социалистическое государство.

За четверть века своего существования Союз Советских Социалистических Республик достиг высокого уровня хозяйственного и культурного развития. Величайшие идеи, носителями которых были лучшие мыслители всех времен, нашли свое осуществление в жизни нашей страны.

В развитии науки мы имеем выдающиеся успехи. Советская математика, продолжая лучшие традиции русской математики и опираясь на достижения мировой науки в начале XX века, достигла значительной высоты. Новые математические идеи и результаты, разработанные в СССР, оказали бесспорное влияние на всю математику. Выдающаяся роль советской математики признается во всех странах, где истинная наука продолжает быть ценимой.

Внутри СССР достижения советской математики отмечены присуждением Сталинских премий ряду выдающихся математиков. В 1941 г. Сталинской премии удостоены И. М. Виноградов, А. Н. Крылов, Н. И. Мусхелишвили, И. А. Кибель, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, С. Л. Соболев, А. Я. Хинчин; в 1942 г.—С. Н. Бернштейн, С. А. Христианович, А. Д. Александров, М. В. Келдыш. Советские математики гордятся лучшими своими представителями.

В грозный час, когда на нашу страну вероломно напали вражеские орды немецких захватчиков, весь советский народ стал на защиту своей родины. Советские математики, вместе со всей советской интелигенцией, отдают все свои силы, все свои знания для обороны отечества от коварного, жестокого и ненавистного врага.

Многие молодые математики с первых дней войны сражаются в рядах доблестной Красной Армии и тем самым непосредственно участвуют в обороне нашей родины. Другие математики полностью подчинили свои исследования задачам обороны страны, работая в военных организациях и специальных институтах оборонного и промышленного характера.

Научно-исследовательские институты по математике обратили особое внимание на разработку тем, имеющих значение для укрепления боевой мощи Красной Армии. Так, в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР значительное место с начала войны заняли математические исследования, связанные с актуальными

вопросами внешней баллистики, с теорией стрельбы, с расчетом самолетов, с расчетом специальных гидротехнических сооружений, с составлением наиболее удобных в военной практике таблиц и т. д. Каждый математик считает делом чести выполнить свой священный долг перед родиной и оказать максимальную помощь в борьбе с кровожадными германскими ордами.

Наряду с этим не прекращается интенсивная работа и по теоретическим вопросам математики; таким образом, развитие математической науки продолжается у нас и в условиях войны.

Велика ненависть советских ученых к гитлеровским вандалам, вторгшимся в пределы нашей родины. Если у себя в Германии эти изуверы уничтожили лучший цвет своей науки и установили господство расовой лженауки, то легко можно себе представить, каковы их намерения в отношении советской культуры и науки.

Впрочем, действия немецкой военщины во временно оккупированных советских районах не оставляют в этом отношении никаких сомнений. Германские оккупанты разоблачили себя перед всем миром, произведя беспримерное уничтожение и разграбление мест, связанных с памятью величайших представителей русского народа: Л. Н. Толстого, А. С. Пушкина, Н. В. Гоголя, П. И. Чайковского, А. П. Чехова. Гитлеризм несет с собой уничтожение культуры, рабство, возврат к средневековью. Поэтому столь беспредельна ненависть к врагу всех советских людей, всех свободолюбивых народов.

Война, которую советский народ ведет против гитлеровских захватчиков за свою свободу, является наиболее справедливой войной. Весь советский народ воодушевлен правотой своего дела и высокими идеями защиты своего отечества. За мужественной борьбой нашей славной Красной Армии с сочувствием и восторгом следит весь мир. В нашей борьбе мы не одиноки. Дружественные послания, полученные во время войны от математиков Соединенных Штатов Америки и Англии, послужили большой моральной поддержкой советским математикам.

У нас имеются все условия для разгрома ненавистного врага. Не может быть никаких сомнений в том, что мы эти условия, несмотря ни на какие трудности, полностью используем, разгромим врага и освободим нашу землю от завоевателей. В этой борьбе советские математики занимают и будут занимать подобающее им место.

Победа над врагом создаст необходимые предпосылки для дальнейшего хозяйственного и культурного развития СССР. И если в первые двадцать пять лет у нас было построено социалистическое общество, то после разгрома врага наша страна, залечив свои раны, уверенно пойдет по пути дальнейшего строительства коммунистического общества.

Да здравствует двадцать пятая годовщина Великой Октябрьской социалистической революции!

Да здравствует наш великий вождь, товарищ Сталин, ведущий нас к победе!

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 285—290 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Основной результат предлагаемой статьи: поверхность S, полная кривизна которой ни в одной точке не положительна и не всюду равна нулю, не может находиться целиком между двумя полостями гиперболоида, асимптотический конус которого имеет достаточно большой угол раствора.

1. Предлагаемая статья имеет целью усилить следующую теорему *:
Поверхность $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первых двух порядков (при всех вещественных x, y), полная кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может при всех значениях x, y оставаться между двумя фиксированными плоскостями $z=\pm h$.

Для краткости будем называть поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы, поверхностями отрицательной кривизны. В таком случае справедлива также более сильная теорема:

Поверхность S отрицательной кривизны $z=f(x, y)$ не может быть целиком расположена между обеими полостями гиперболоида (имеющими по одной точке пересечения с любой прямой параллельной оси OX), асимптотический конус которого имеет достаточно большой угол раствора.

Иначе говоря, мы утверждаем, что *если для данной поверхности S возможно при всяком $\delta>0$ указать некоторое h, при которых неравенство*

$$z^2<\delta^2(x^2+y^2)+h^2 \tag{1}$$

соблюдается для всех x, y, то поверхность S не может быть отрицательной кривизны (в указанном выше смысле) **.

2. Доказательство этой теоремы представляет некоторое видоизменение данного в вышеуказанной работе; однако, для большей ясности мы проводим все рассуждения полностью, за исключением вспомогательной леммы, содержание которой необходимо напомнить.

---

* S. Bernstein, Sur un théorème de géométrie et son applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Сообщения Харьковского матем. общества, XV (1915), 38—45; «Успехи математических наук», вып. VIII (русский перевод).

** Очевидно, что для всякой данной поверхности S отрицательной кривизны существует такое $\delta>0$, что ни при каких a, b, h неравенство $z^2<\delta^2[(x-a)^2+(y-b)^2]+h^2$ невозможно для всех x, y.

ЛЕММА. *Пусть $z = f(x, y)$ — функция вещественных переменных x, y, имеющая непрерывные частные производные первых двух порядков, и пусть B — некоторая область, в которой $z < 0$, имеющая в качестве границы множество точек, где $z = 0$. Область B не может быть ограниченной, если $rt - s^2 \leqslant 0$ во всех точках области B, для которых $p^2 + q^2 < N$, где N — данное сколь угодно малое положительное число.*

Итак, допустим, что существуют такие постоянные $\delta > 0$, $h > 0$, что для любых x, y соблюдается неравенство

$$|z| < \sqrt{\delta^2 (x^2 + y^2) + h^2}. \tag{1}$$

Согласно условию теоремы, на поверхности S есть точки, где $rt^2 - s^2 < 0$; кроме того, если этим свойством обладает точка M, то оно сохраняется и внутри некоторой окрестности точки M, поэтому на поверхности S найдется точка, где вместе с $rt - s^2 < 0$ осуществляется также $p^2 + q^2 = A^2$, где $A > 0$. Производя соответствующую замену координат, можем поэтому принять, что в точке M $z = x = y = p = 0$, $q = A$, так что касательная плоскость к поверхности в точке M имеет уравнение

$$z_1 = Ay \tag{2}$$

и пересекает поверхность S по четырем ветвям, проекции которых на плоскость XOY разделяют окрестность начала координат на четыре различных области Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, где знак

$$\rho(x, y) = z - z_2 = f(x, y) - Ay \tag{3}$$

в соседних областях противоположен; мы можем принять, что $\rho < 0$ в Ω_1 и Ω_3 и $\rho > 0$ в Ω_2 и Ω_4.

Согласно вышеуказанной лемме, ни одна из областей Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, продолженная до границы $\rho = 0$, не может быть ограниченной. Следовательно, области Ω_1, Ω_2 не имеют общих точек, так как, если бы такая общая точка существовала, ее можно было бы соединить с началом координат O двумя различными линиями, находящимися соответственно в областях Ω_1 и Ω_2, и таким образом получился бы замкнутый контур, внутри которого помещалась бы вся область Ω_2 или Ω_4.

С другой стороны, вследствие неравенства (1), в котором мы положим $\delta < A$, необходимо, чтобы каждая из областей Ω_1 и Ω_3 находилась в части плоскости, где $Ay + \sqrt{\delta^2 (x^2 + y^2) + h^2} > 0$, т. е. выше нижней ветви C_i гиперболы $(A^2 - \delta^2) y^2 - \delta^2 x^2 = h^2$, так как при $\sqrt{\delta^2 (x^2 + y^2) + h^2} \leqslant -Ay$ мы имели бы $z + \sqrt{\delta^2 (x^2 + y^2) + h^2} \leqslant z - Ay < 0$, что противоречит (1). Аналогичным образом убеждаемся, что области Ω_2 и Ω_4 (которые также не имеют общих точек) расположены ниже верхней ветви C_s той же гиперболы $(A^2 - \delta^2) y^2 - \delta^2 x^2 = h^2$. Но в таком случае по крайней мере одна из областей Ω_1 или Ω_3 также находится ниже C_s, так как если бы обе эти области имели точки на C_s, то их границы содержали бы точку на C_s, где $z - Ay = z - \sqrt{\delta^2 (x^2 + y^2) + h^2} = 0$, что противоречит (1). По той же причине одна из областей Ω_2, Ω_4 находится выше C_i.

Итак, мы видим, что по крайней мере одна из областей с нечетным

номером и одна из областей с четным номером находятся целиком между ветвями C_i и C_s гиперболы

$$(A^2 - \delta^2)\, y^2 - \delta^2 x^2 = h^2. \tag{4}$$

Я утверждаю, что по крайней мере одна из этих двух неограниченных областей простирается до бесконечности только в одном направлении оси OX. В самом деле, допустим, что обе области Ω_1 и Ω_2, находящиеся между C_i и C_s, простираются до бесконечности в обе стороны в направлении оси OX; тогда в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 можно провести соответствующую кривую L_1 и кривую L_2, простирающиеся до бесконечности в обоих направлениях. Но так как начало координат O является граничной точкой для Ω_1 и для Ω_2, то оно должно находиться между L_1 и L_2, так же как и обе другие области Ω_3 и Ω_4 (которые не могут иметь точек ни на L_1, ни на L_2). Следовательно, к каждой из областей Ω_3 и Ω_4, которые также оказываются между C_i и C_s, можно было бы применить то же рассуждение и провести в них кривые L_3 и L_4, простирающиеся до бесконечности в обоих направлениях, и так как начало координат O не может находиться одновременно между L_1 и L_3, между L_1 и L_4 и между L_2 и L_4, то во всяком случае по крайней мере одна * из областей Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 находится вся между C_i и C_s и простирается до бесконечности лишь в одну сторону, например, в сторону $x \to \infty$: пусть это будет область Ω_2 (где $\rho > 0$).

3. Рассмотрим в области Ω_2 функцию $\rho(x, y) = z - Ay$. В силу вышесказанного Ω_2 находится внутри части плоскости, ограниченной слева некоторой прямой $x = x_0'$, снизу и сверху ветвями C_i и C_s гиперболы (4) и не ограниченной справа. Таким образом, придавая x всевозможные значения $x_0' < x < \infty$ (где x_0'—нижняя грань абсцисс точек, принадлежащих к Ω_2), исследуем абсолютный максимум $u(x_1)$, получаемый функцией $\rho(x_1, y)$ в точках с данной абсциссой $x = x_1$, принадлежащих области Ω_2, к которым можем присоединить и предельные точки области Ω_2, где $\rho(x_1, y) = 0$. В таком случае $u(x) > 0$ при $x > x_0'$ и $u(x_0') = 0$. Пусть $x_0 > x_0'$ будет некоторая определенная абсцисса, $u(x_0) = \rho(x_0, y_0) \geqslant \geqslant \rho(x_0, y)$ — соответствующий ей абсолютный максимум $\rho(x_0, y)$, когда точка (x_0, y) принадлежит Ω_2.

Я утверждаю, что, каково бы ни было $x_1 > x_0$, имеет место неравенство

$$u(x_1) \geqslant \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'}\, u(x_0). \tag{5}$$

В самом деле, предположим, что это неравенство не выполняется, тогда

$$\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'}\, u(x_1) - u(x_0) < 0,$$

и, следовательно, функция

$$v(x, y) = \frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'}\, u(x_1) - \rho(x, y) \tag{6}$$

становилась бы отрицательной при $x = x_0$, $y = y_0$, так что существовала бы область B, где $v < 0$. Но эта область должна находиться внутри кон-

* Из того же рассуждения можно было бы заключить даже, что указанным свойством обладают не менее двух областей; но это замечание нам не понадобится.

тура, образованного прямыми $x = x_0'$, $x = x_1'$ и кривыми C_i и C_s, так как $v = 0$ при $x = x_0'$ и $v \geqslant 0$ при $x = x_1$, а также, когда одновременно $x_0' < x < x_1$ и $\rho(x, y) = 0$, что несовместимо с леммой вследствие того, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = rt - s^2 \leqslant 0.$$

Таким образом неравенство (5) доказано; положим в нем, для определенности, $x_0 = 1$ и обозначим через C постоянную $u(1) = C$. В таком случае из (5) следует, что, каково бы ни было $C' < C$, для всех достаточно больших $x > 1$ соблюдается неравенство

$$u(x) > C'x. \tag{7}$$

Заметим, что в качестве коэффициента C' в неравенстве (7) можно было бы взять любое значение $\rho(1, y) = f(1, y) - Ay < u(1)$, соответствующее точке $(1, y)$, лежащей в области Ω_2 (где $\rho(1, y)$ заведомо положительно).

4. Теперь не трудно установить, что для поверхности S отрицательной кривизны, для которой известны определенные выше постоянные $A > 0$, $C > 0$, неравенство (1) не может осуществляться для всех достаточно больших x, если постоянная δ удовлетворяет неравенству

$$\delta^2 < \frac{A^2C^2}{4A^2 + C^2}. \tag{8}$$

В самом деле, если δ удовлетворяет (8), то и подавно $\delta^2 < A^2$; следовательно, все предыдущее рассуждение применимо, и полагая $B < C' < C$, где

$$\delta^2 = \frac{A^2B^2}{4A^2 + B^2}, \quad \text{т. е.} \quad B^2 = \frac{4\delta^2 A^2}{A^2 - \delta^2}, \tag{9}$$

неравенство (7) соблюдается для всех достаточно больших x; другими словами, для достаточно больших $x > 0$ существуют значения y, удовлетворяющие неравенству

$$A^2y^2 < \delta^2(x^2 + y^2) + h^2, \tag{10}$$

при которых

$$\rho(x, y) = z - Ay > C'x. \tag{10-bis}$$

Для этих значений (x, y) мы тем более должны были бы иметь

$$2\sqrt{\delta^2(x^2 + y^2) + h^2} > C'x,$$

поэтому для сколь угодно больших $x > 0$ соблюдалось бы также неравенство

$$4\left[\delta^2 x^2 + \frac{\delta^2(\delta^2 x^2 + h^2)}{A^2 - \delta^2} + h^2\right] > C'^2 x^2,$$

т. е.

$$B^2x^2 + \left(\frac{B^2}{A^2} + 4\right)h^2 > C'^2x^2,$$

что невозможно (вследствие $B^2 < C'^2$).

Полученный выше результат может быть обобщен так же, как в цитированной работе, если использовать в полном объеме формулированную в начале лемму.

5. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА. *Если кривизна поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производ-*

ные первых двух порядков (для всех x, y), отрицательна в некоторой данной точке M, где $p^2+q^2=A^2>0$, и может становиться положительной только при $p^2+q^2>N_1>A^2$, то возможно указать такое $\delta>0$, что неравенство

$$|z|<\sqrt{\delta^2(x^2+y^2)+h^2} \qquad (1)$$

не осуществимо для всех (x, y), каково бы ни было данное число h.

В самом деле, согласно условию теоремы, принимая точку M за начало координат и имея в виду общую формулировку леммы, можем повторить без изменения все, что было сказано об областях Ω, вплоть до исследования $u(x^1)=\underset{x=x_1}{\mathrm{Max}}\,\rho(x, y)$ внутри области Ω_2 при $x_1\to\infty$, которое требует добавления. В данном случае наша лемма могла бы быть совместима с ограниченностью области B, где

$$v(x, y)=\frac{x-x_0'}{x_1-x_0'}u(x_1)-\rho(x, y)<0, \qquad (11)$$

т. е. разрешала бы нарушение неравенства (5) для соответствующего x_1, но только тогда, когда в этой области B есть точки, где $rt-s^2>0$ и одновременно (при любом $\varepsilon>0$)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(p-\frac{u(x_1)}{x_1-x_0'}\right)^2+(q-A)^2\leqslant\varepsilon^2.$$

Однако по условию теоремы, если такие точки существуют, то в них $p^2+q^2>N_1>A^2$. Таким образом точка с координатами p, q должна находиться внутри круга радиуса ε, с центром $\left(\frac{u(x_1)}{x_1-x_0'}, A\right)$ и вне круга радиуса $\sqrt{N_1}$ и с центром в начале координат: следовательно, расстояние от $\left(\frac{u(x_1)}{x_1-x_0'}, A\right)$ до начала координат должно быть больше разности между радиусами обоих кругов, т. е.

$$\left[\frac{u(x_1)}{x_1-x_0'}\right]^2+A^2>\left(\sqrt{N_1}-\varepsilon\right)^2.$$

Следовательно, если неравенство (5) могло бы нарушиться для некоторого x_1, то для того же x_1 мы по необходимости имели бы

$$u(x_1)>(x_1-x_0')\sqrt{N_1-A^2+\varepsilon^2-2\varepsilon\sqrt{N_1}},$$

и, обозначая через D' любое число $<\sqrt{N_1-A^2}$, видим таким образом, что одно из неравенств (5) или

$$u(x_1)>D'(x_1-x_0') \qquad (12)$$

должно быть соблюдено для всех $x_1>0$. Окончание доказательства очевидно: оценка для δ^2 посредством неравенства (8) должна быть заменена

$$\delta^2<\frac{A^2(N_1-A^2)}{3A^2+N_1}, \qquad (8\text{-bis})$$

если $N_1-A^2<C^2$.

6. Следствие. *Если S есть поверхность отрицательной кривизны или удовлетворяет условиям обобщенной теоремы, то ни при каких постоянных значениях $\alpha < 1$ и h_1 неравенство*

$$|z| < (x^2 + y^2 + h_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} \tag{13}$$

не возможно для всех x, y.

В самом деле, если бы неравенство (13) было осуществимо для всех x, y, то, как бы мало ни было $\delta > 0$, можно было бы определить постоянную h^2, удовлетворяющую при любых x, y неравенству

$$h^2 > (x^2 + y^2 + h_1^2)^{\alpha} - \delta^2 (x^2 + y^2)$$

(так как при $\alpha < 1$ правая часть имеет максимум, вычисление которого не представляет труда), что противоречило бы теореме. Отсюда вытекает, очевидно, также соответствующее усиление обобщенной теоремы Лиувилля:

Если z есть решение уравнения эллиптического типа

$$A(x, y, z, p, q, r, s, t)\, r + 2B(x, y, z, p, q, r, s, t)\, s + \\ + C(x, y, z, p, q, r, s, t)\, t = 0,$$
$$AC - B^2 > 0,$$

имеющее непрерывные производные первых двух порядков при всех x, y и удовлетворяющее неравенству (13), *то z есть постоянная.*

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
11 VI 1942

S. BERNSTEIN. RENFORCEMENT DE MON THÉORÈME SUR LES SURFACES À COURBURE NÉGATIVE

RÉSUMÉ

$z = f(x, y)$, possédant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres, représente une surface S, dont la courbure totale est partout non positive sans être identiquement nulle, il existe une constante $\delta > 0$, telle que $|z| - \delta\sqrt{x^2 + y^2}$ dépasse toute grandeur positive donnée pour certaines valeurs x, y.

Il resulte de là, en particulier, que, si z satisfait à une équation du type elliptique

$$Ar + 2Bs + Ct = 0, \qquad (AC - B^2 > 0)$$

où A, B, C sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, r, s, t et à une inégalité de la forme

$$|z| < (x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{\alpha}{2}},$$

où $\alpha < 1$ et h sont des constantes, la fonction z se réduit elle même à une constante.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 291—308 Série mathématique

Б. В. ГНЕДЕНКО

ЛОКАЛЬНО-УСТОЙЧИВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье рассматриваются однородные случайные процессы с независимыми приращениями и устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы закон распределения приращения, соответствующего промежутку времени t, при $t \to 0$ и надлежащей нормировке, сходился к некоторому предельному. В качестве предельных законов распределения могут появляться только устойчивые законы. Для каждого из устойчивых законов устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы он появлялся в качестве предельного в данном случайном процессе.

Одномерным стохастическим процессом называется совокупность случайных величин $x(t)$, зависящих от одного параметра t, принимающего всевозможные вещественные значения. Одним из наиболее важных типов стохастических процессов являются однородные процессы с независимыми приращениями, для которых

1) функции распределения величин $x(t+t_0)-x(t_0)$ зависят только от t и

2) приращения величины $x(t)$, соответствующие любому числу неперекрывающихся интервалов оси t, независимы между собой.

Поскольку нас будут интересовать только приращения величины $x(t)$, можно принять без ограничения общности, что $x(0)=0$.

Вероятностная характеристика такого процесса осуществляется при помощи задания для каждого значения $t>0$ функции распределения $\Phi_t(x)$ величины $x(t_0+t)-x(t_0)$ или же заданием характеристической функции этой величины

$$\varphi_t(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\Phi_t(x).$$

Так как при любом $t>0$

$$\varphi_t(\lambda)=\{\varphi_1(\lambda)\}^t,$$

то ясно, что однородный случайный процесс вполне определяется заданием характеристической функции случайной величины $x(1)$; вместе с А. Я. Хинчиным [5] мы будем для краткости писать $\varphi(\lambda)$ вместо $\varphi_1(\lambda)$ и называть ее характеристической функцией процесса.

Исследованиями А. Н. Колмогорова и P. Lévy было установлено, что функция $\varphi(\lambda)$ тогда и только тогда является характеристической функцией некоторого однородного процесса с независимыми приращениями, когда ее логарифм может быть представлен в виде

$$\lg \varphi(\lambda) = i\gamma\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \tag{1}$$

где γ — постоянное, $G(u)$ — неубывающая функция с ограниченной вариацией.

Формула (1) может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\lg \varphi(\lambda) = i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left\{ e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2} \right\} dM(u) + $$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left\{ e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2} \right\} dN(u), \tag{2}$$

где γ и σ — вещественные постоянные, а $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие условию $\int_{-1}^{0} u^2\, dM(u) + \int_{0}^{1} u^2\, dN(u) < +\infty$.

Без ограничения общности мы можем в дальнейшем считать, что $G(-\infty) = M(-\infty) = N(+\infty) = 0$.

Случайные величины ξ, логарифмы характеристических функций которых определяются формулой (1) (и только они), обладают тем свойством, что при любом натуральном n их можно представить в виде суммы

$$\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nn} \tag{3}$$

n взаимно независимых случайных величин $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}$, подчиненных одной и той же функции распределения $\Phi_n(x)$. В силу этого свойства неограниченной делимости такие величины получили название безгранично-делимых, а их функции распределения — безгранично-делимых функций распределения.

Важность класса безгранично делимых законов была выяснена лишь в последние годы. Помимо того, что эти и только эти законы управляют однородными случайными процессами с независимыми приращениями, было обнаружено, что все безгранично-делимые законы и только они могут выступать в качестве предельных для сумм независимых случайных величин

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n},$$

каждая из которых мало влияет на сумму*.

В настоящей работе мы ставим своей целью выяснение некоторых локальных свойств однородных процессов с независимыми приращениями.

---

* Точнее это требование малости слагаемых звучит так: при $n \to \infty$ равномерно относительно k $[1 \leqslant k \leqslant k_n]$

$$P\{|x_{nk}| > \varepsilon\} \to 0$$

для любого $\varepsilon > 0$.

А именно, во-первых, мы находим предельные законы, к которым могут сходиться при $t \to 0$ функции распределения величин

$$\frac{x(t)}{a_t} - b_t \tag{4}$$

при надлежащем подборе вещественных постоянных $a_t > 0$ и b_t и, во-вторых, выясняем условия сходимости функций распределения величин (4) к каждому предельному закону.

Этим задачам может быть придана несколько иная словесная формулировка. Пусть ξ безгранично-делимая случайная величина. Согласно определению, при любом n мы имеем равенство (3). Спрашивается: 1) к каким предельным законам при надлежащем подборе вещественных постоянных a_n и b_n и при $n \to \infty$ могут сходиться функции распределения величин

$$\frac{\xi_{nk}}{a_n} - b_n? \tag{5}$$

2) каковы условия сходимости функций распределения величин (5) к каждому предельному закону? Нас интересует, таким образом, предельное поведение законов распределения при неограниченном дроблении безгранично-делимых случайных величин.

Стоящие перед нами проблемы весьма близки по постановкам к задачам теории нормированных сумм одинаково распределенных независимых случайных величин (теории устойчивых законов). В силу этой аналогии мы назовем случайные величины ξ и их функции распределения, для которых функции распределения величин (5) при $n \to \infty$ сходятся к предельной, *локально-устойчивыми*.

Мы начнем с того, что обнаружим, какие законы могут выступать в качестве предельных для величин (5). Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы закон* $\Phi(x)$ *был предельным для величин* (5), *необходимо и достаточно, чтобы он был устойчивым.*

Доказательство. Если $f(\lambda)$ есть характеристическая функция величины ξ, то характеристическая функция величины (5) равна $e^{-i\lambda b_n} f^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right)$.

По условию

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i\lambda b_n} f^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right) = \varphi(\lambda).$$

Так как при любом натуральном m

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i\lambda m b_n} f^{\frac{m}{n}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right) = \varphi^m(\lambda),$$

и в силу одной теоремы Хинчина [(4), теорема 43]

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i\lambda m b_{nm}} f^{\frac{n}{nm}}\left(\frac{\lambda}{a_{nm}}\right) = \varphi(\alpha_m\lambda)\, e^{i\beta_m\lambda},$$

где $\alpha_m > 0$ и β_m — вещественные постоянные, то функция $\varphi(\lambda)$ должна удовлетворять при любом натуральном m равенству

$$\varphi^m(\lambda) = \varphi(\alpha_m)\, e^{i\beta_m\lambda}.$$

Известно, что только устойчивые законы обладают этим свойством.

Обратное предложение, что каждый устойчивый закон является предельным в указанном смысле, очевидно.

Напомним, что закон распределения является устойчивым тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции имеет следующий вид

$$\lg \varphi(\lambda) = i\gamma\lambda - c_0 |\lambda|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{\lambda}{|t|} \omega(\lambda, \alpha) \right\},$$

где $|\beta| \leqslant 1$, $0 < \alpha < 2$, $c > 0$ и γ — вещественные постоянные, а

$$\omega(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\alpha & \text{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \lg|\lambda| & \text{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 2$ мы получаем, в частности, закон Гаусса.

Для устойчивых законов в формулах (1) и (2) мы должны положить: при $\alpha \neq 2$

$$M(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha}, \quad N(u) = -\frac{c_2}{u^\alpha}$$

и при $\alpha = 2$

$$G(u) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad u < 0, \\ \sqrt{c_0} & \text{для} \quad u > 0. \end{cases}$$

Одной из основных задач для теории локально-устойчивых законов является определение условий, при выполнении которых закон будет локально-гауссовым или вообще локально-устойчивым. Ближайшая наша цель и состоит в указании необходимых и достаточных условий этого. Их вывод будет основываться на следующих предложениях [(1), теоремы 2 и 3]:

ЛЕММА I. *Для сходимости последовательности* $\{\Phi_n(x)\}$ *безгранично-делимых законов распределения к предельному закону* $\Phi(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

1) *в каждой точке непрерывности функции* $G(u)$

$$G_n(u) \to G(u),$$

2) $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$,

3) $\gamma_n \to \gamma$,

где функции $G_n(u)$ *и* $G(u)$, *постоянные* γ_n *и* γ_n *определены формулой* (1) *соответственно для законов* $\Phi_n(x)$ и $\Phi(x)$.

ЛЕММА II. *Для сходимости последовательности* $\{\Phi_n(x)\}$ *безгранично-делимых законов распределения к предельному закону* $\Phi(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

1) *в точках непрерывности функций* $M(u)$ *и* $N(u)$

$$M_n(u) \to M(u), \quad N_n(u) \to N(u),$$

2) $\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN_n(u) + \sigma_n^2\right\} = \sigma^2,$

3) $\gamma_n \to \gamma,$

где функции $M_n(u)$, $N_n(u)$ *и* $M(u)$, $N(u)$ *и постоянные* σ_n, γ_n *и* σ, γ *определяются формулой* (2) *соответственно для законов* $\Phi_n(x)$ *и* $\Phi(x)$.

При определении условий сходимости функций распределения случайных величин (5) мы должны положить в предыдущих леммах

$$G_n(u) = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{a_n u} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z),$$

$$M_n(u) = \frac{1}{n} M(a_n u), \quad N_n(u) = \frac{1}{n} N(a_n u)$$

и

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{a_n\sqrt{n}}, \quad \gamma_n = \frac{\gamma}{na_k} - b_n.$$

Мы увидим, что условия локальной устойчивости будут весьма близки к тем, которые имеют место для областей притяжения устойчивых законов в теории сумм независимых случайных величин [см., например, ([2])]. Однако нужно отметить, что теоретико-вероятностный смысл этих условий различен. Мы укажем, например, на то обстоятельство, что к областям притяжения устойчивых законов, отличных от гауссова, могут принадлежать лишь законы, имеющие бесконечную дисперсию, тогда как существуют законы с конечной дисперсией, ведущие себя локально как любой устойчивый закон. Действительно, рассмотрим безгранично-делимый закон, для которого в формуле (2) $\gamma = 0$, $\sigma = 0$,

$$M(u) = \begin{cases} 0 & \text{для } u < -1, \\ \dfrac{c_1}{|u|^\alpha} & \text{для } 0 > u > -1 \end{cases}$$

и

$$N(u) = \begin{cases} -\dfrac{c_2}{|u|^\alpha} & \text{для } 0 < u < 1, \\ 0 & \text{для } u > 1, \end{cases}$$

α, c_1, c_2 — неотрицательные константы ($c_1 + c_2 > 0$, $0 < \alpha < 2$).

Дисперсия для этого закона, как легко подсчитать, равна

$$-\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\lg\varphi(\lambda)\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\infty} u^2 dN(u) =$$

$$= \alpha\int_{0}^{1}(c_1+c_2)\,u^{1-\alpha}\,du = \frac{\alpha(c_1+c_2)}{2-\alpha}.$$

Положим $a_n = \frac{1}{n^{1/\alpha}}$, $b_n = 0$, тогда, как легко видеть,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha} \quad \text{при всех } u < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} N_n(u) = -\frac{c^2}{u^\alpha} \quad \text{при всех } u > 0$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN_n(u)\right\} = 0.$$

Эти равенства доказывают наше утверждение.

ТЕОРЕМА II. *Всякий безгранично-делимый закон, содержащий гауссову компоненту*, является локально-гауссовым.*

Доказательство. Согласно лемме II, нам нужно показать, что при $n\to\infty$ и любом $\varepsilon>0$ в условиях теоремы выполняются соотношения

$$\frac{1}{n}\left(M(-\varepsilon a_n) - N(\varepsilon a_n)\right) \to 0 \tag{6}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{na_n^2}\left\{\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \sigma^2 + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u)\right\} = 1. \tag{7}$$

Выберем $a_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, тогда

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{na_n^2}\left\{\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \sigma^2 + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u)\right\} =$$

$$= 1 + \left(\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u)\right).$$

Так как $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u)\right) = 0 \tag{8}$$

и значит при $n\to\infty$

$$\sigma_n \to 1.$$

Нам нужно теперь доказать соотношение (6). Предположим, что оно не имеет места. Это означает, что найдется такая последовательность натуральных чисел n_k ($\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$), что при $k\to\infty$ и хотя бы при одном $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{n_k}\chi(a_{n_k}\varepsilon) \to \beta > 0, \tag{9}$$

где обозначено

$$\chi(x) = M(-x) - N(x) \quad (x>0).$$

Легко проверить следующую последовательность соотношений

$$\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u) = -\int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 d\chi(u) = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon a_{n_{k+1}}}^{\varepsilon a_{n_k}} u^2 d\chi(u) \geqslant$$

* Мы говорим, что безгранично-делимый закон $F(x)$ имеет гауссову компоненту, если в формуле (2) для него $\sigma\neq 0$.

$$\geqslant -\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{k\pm1}}^2 \int_{\varepsilon a_{n_{k+1}}}^{\varepsilon a_{n_k}} d\chi(u) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{k+1}}^2 (\chi(\varepsilon a_{n_{k+1}}) - \chi(\varepsilon a_{n_k})) =$$

$$= \varepsilon^2 \left\{ a_{n_1}^2 \chi(\varepsilon a_{n_1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi(\varepsilon a_{n_{k+1}}) (a_{nk}^2 - a_{nk+1}^2) \right\} =$$

$$= \varepsilon^2 \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n_1} \chi(\varepsilon a_{n_1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk+1} \chi(\varepsilon a_{nk+1}) \left(\frac{nk+1}{nk} - 1 \right) \right\}.$$

В силу (8) найдется такое s, что для всех $k > s$

$$\frac{1}{nk+1} \chi(\varepsilon a_{nk\pm1}) \geqslant \frac{1}{2} \beta.$$

Таким образом, из предположения, что равенство (9) имеет место, вытекает неравенство

$$\int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} u^2 dN(u) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^2 \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n_1} \chi(\varepsilon a_{n_1}) + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{nk+1} \chi(\varepsilon a_{nk\pm1}) \left(\frac{n_{k\pm1}}{nk} - 1 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{nk+1}{nk} - 1 \right) \right\}.$$

Так как ряд $\sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{nk+1}{nk} - 1 \right)$ расходится при любом выборе последовательности $\{n_k\}$ *, то мы приходим к противоречию с равенством (8). Это доказывает равенство (6) и, следовательно, всю теорему.

В связи с только что обнаруженным фактом интересно вспомнить следующий результат А. Я. Хинчина ([5]) относительно локального роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями: все процессы, содержащие гауссову компоненту, и только они обладают наибольшей локальной колеблемостью, в частности, для всех них и только для них имеет место закон повторного логарифма. Мы только что обнаружили, что все такие процессы являются локально-гауссовыми, однако, как мы увидим, ими не исчерпывается класс локально-гауссовых законов. Свойство наибольшей локальной колеблемости мы можем выразить в терминах локальной гауссовости. С этой целью мы введем понятие о нормальной локальной гауссовости.

---

* Расходимость этого ряда можно показать хотя бы следующим способом. Положим $a_k = \frac{nk+1}{nk} - 1$. Тогда для сходимости ряда $\sum a_k$, как известно, необходимо и достаточно, чтобы сходилось бесконечное произведение $\Pi(1 + a_k)$. В нашем случае это произведение расходится, так как $\prod_{k=s}^{r}(1 + a_k) = \prod_{k=s}^{r} \frac{nk\pm1}{nk} = \frac{n_{r+1}}{n_s} \to \infty$ при $r \to \infty$.

Мы назовем закон $F(x)$ *нормально-локально-гауссовым*, если функции распределения величины (5) сходятся к закону Гаусса при значениях коэффициентов

$$a_n = \frac{a}{\sqrt{n}},$$

где a — постоянное.

ТЕОРЕМА III. *Для того чтобы однородный случайный процесс с независимыми приращениями подчинялся закону повторного логарифма, необходимо и достаточно, чтобы он был нормально-локально-гауссовым.*

Доказательство. Мы видели при доказательстве предыдущей теоремы, что каждый процесс, содержащий гауссову компоненту, является нормально-гауссовым; поэтому, согласно только что сформулированной теореме Хинчина, нам достаточно обнаружить, что всякий нормально-локально-гауссов процесс имеет гауссову компоненту. Нам нужно доказать, что для него в формуле (2) $\sigma \neq 0$.

Пусть процесс нормально-локально-гауссов, тогда для него выполняется соотношение (7). Так как $a_n = \frac{a}{\sqrt{n}}$, то (7) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a^2} \left\{ \int_{-\varepsilon a_n}^{0} x^2 dM(x) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} x^2 dN(x) + \sigma^2 \right\} = 1.$$

Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \int_{-\varepsilon a_n}^{0} x^2 dM(x) + \int_{0}^{\varepsilon a_n} x^2 dN(x) \right\} = 0.$$

и, значит, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sigma^2}{a^2} = 0$. А так как a и σ не зависят ни от ε, ни от n, то мы находим, что $a = \sigma \neq 0$.

ТЕОРЕМА IV. *Для того чтобы закон $F(x)$ был локально-гауссовым, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{X\to 0} \frac{x^2 \int\limits_{|u|>X} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u)}{\int\limits_{|u|<X} dG(u)} = 0, \tag{10}$$

где $G(u)$ — функция, определяемая по формуле (1) *для закона* $F(x)$.

Доказательство необходимости. Согласно лемме I, функции распределения величин (5) будут сходиться к закону Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

тогда и только тогда, когда для всех $u\, (u \leqslant +\infty)$ при $n \to \infty$

$$G_n(u) \to \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ 1 & \text{при } u > 0, \end{cases}$$

и

$$\gamma_n \to 0.$$

Последнее требование может быть осуществлено всегда путем выбора постоянных b_n хотя бы по следующему правилу

$$b_n = \frac{\gamma_n}{a_n} + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n^2 - 1}{a_n^2} \cdot \frac{v}{1+v^2}\, dG(a_n v).$$

Ясно, что первое условие может быть записано в следующей эквивалентной форме: при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{na_n^2} \int\limits_{|z|<\varepsilon} \frac{1+a_n^2 z^2}{1+z^2}\, dG(a_n z) &= \frac{1}{n} \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z) \to 1, \\ \frac{1}{na_n^2} \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon} \frac{1+a_n^2 z^2}{1+z^2}\, dG(a_n z) &= \frac{1}{n} \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z) \to 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Легко проверить, что имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon^2)\,a_n^2 n} \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z) \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z) \leqslant \frac{1+\varepsilon^2 a_n^2}{a_n^2 n} \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z)$$

и

$$\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)\,n} \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z) \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z) \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z).$$

Из них выводим, что

$$\frac{a_n^2\varepsilon^2 \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z)}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2 a_n^2) \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z)} \leqslant \frac{\int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z)}{\int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{a_n^2+z^2}\, dG(z)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_n^2\varepsilon^2 \int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) \int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z)}. \qquad (12)$$

Эти неравенства позволяют получить доказательство необходимости условия теоремы. В самом деле, пусть закон $F(x)$ локально-гауссов, тогда из неравенства (12) в силу (11) находим, что при $n \to \infty$ должно быть

$$\frac{\varepsilon^2 a_n^2 \int\limits_{|z|>\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z)}{\int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z)} \to 0.$$

Пусть теперь X стремится к нулю по любому закону. Для каждого достаточно малого значения X мы можем подобрать столь большое значение n, что будут выполняться неравенства*

$$\varepsilon a_{n-1} \geqslant X \geqslant \varepsilon a_n.$$

* Не ограничивая общности, мы можем считать последовательность $\{a_n\}$ убывающей.

Напишем следующие легко проверяемые неравенства

$$\frac{\varepsilon^2 a_n^2 \int\limits_{|z|>\varepsilon a_{n-1}} \frac{1+z^2}{z^2}\,dG(z)}{\int\limits_{|z|<\varepsilon a_{n-1}} dG(z)} \leqslant \frac{X^2 \int\limits_{|z|>X} \frac{1+z^2}{z^2}\,dG(z)}{\int\limits_{|z|<X} dG(z)} \leqslant \frac{\varepsilon^2 a_{n-1}^2 \int\limits_{|z|>\varepsilon a_n} \frac{1+z^2}{z^2}\,dG(z)}{\int\limits_{|z|<\varepsilon a_n} dG(z)}.$$

Для завершения доказательства необходимости условия теоремы достаточно заметить, что из локальной устойчивости закона $F(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1. \tag{13}$$

Действительно, если предположить, что при $n \to \infty$

$$f^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right) e^{i\lambda b_n} \to \varphi(\lambda), \tag{14}$$

то из того, что для безгранично-делимого закона $\varphi(\lambda) \neq 0$, следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f^{\frac{1}{n(n+1)}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right) e^{\frac{i\lambda b_n}{n+1}} = 1.$$

Значит мы находим, что, наряду с (14), имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\lambda}{a_n}\right) e^{i\lambda\frac{nb_n}{n+1}} = \varphi(\lambda). \tag{15}$$

Соотношение (13) вытекает из (14) и (15) как простое следствие приводимой ниже леммы ([3]).

ЛЕММА III. *Пусть $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ — функции распределения и $\Phi(x)$ отлична от единичной. Если для некоторых последовательностей постоянных $a_n > 0$ и b_n, $\alpha_n > 0$ и β_n*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \beta_n}{a_n} = 0.$$

Доказательство достаточности. Предположим теперь, что условие теоремы выполнено и докажем, что в этом случае закон $F(x)$ — локально-гауссов. Нам несколько удобнее будет вести рассуждения в терминах функций $M(u)$ и $N(u)$, поэтому мы прежде всего преобразуем условие (10). Из определения функций $M(u)$, $N(u)$ и $G(u)$, а также постоянного σ следует, что

$$\int\limits_{|z|>X} \frac{1+z^2}{z^2}\,dG(z) = M(-X) - N(X) = \chi(X),$$

$$\int\limits_{|z|<X} dG(z) = \int\limits_{-X}^{0} \frac{z^2}{1+z^2}\,dM(z) + \int\limits_{0}^{X} \frac{z^2}{1+z^2}\,dN(z) + \sigma^2.$$

Отсюда ясно, что

$$H(X) = \int\limits_{-X}^{0} z^2\,dM(z) + \sigma^2 + \int\limits_{0}^{X} z^2\,dN(z) \geqslant \int\limits_{|z|<X} dG(z) \geqslant \frac{H(X)}{1+X^2}$$

и

$$\frac{X^2\chi(X)}{H(X)} \leqslant \frac{X^2 \int\limits_{|z|>X} \frac{1+z^2}{z^2}\,dG(z)}{\int\limits_{|z|<X} dG(z)} \leqslant (1+X^2)\frac{X^2\chi(X)}{H(X)}.$$

Мы видим, таким образом, что условие

$$\lim_{X\to 0} \frac{X^2\chi(X)}{H(X)} = 0 \tag{16}$$

эквивалентно условию теоремы.

Покажем теперь, что если (16) имеет место, то можно будет подобрать такие постоянные a_n, что будут выполняться соотношения (6) и (7). А это, как мы знаем, доказывает, что закон $F(x)$ локально-гауссов.

В дальнейшем мы будем предполагать, что закон $F(x)$ не содержит гауссовой компоненты, так как в противоположном случае наша теорема уже доказана. Отсюда прежде всего заключим, что при доказательстве мы можем считать, что

$$\chi(X) \longrightarrow \infty \tag{17}$$

при $X \longrightarrow 0$. Действительно, если это не так и $\chi(X)$ отлична от нуля, то в силу (16) должно быть $\frac{1}{X^2}H(X) \longrightarrow \infty$ при $X \longrightarrow 0$. А это последнее соотношение в силу неравенства

$$\frac{1}{X^2}\left(\int\limits_{-X}^{0} z^2\,dM(z) + \int\limits_{0}^{X} z^2\,dN(z)\right) \leqslant M(0) - M(-x) + N(x) - N(0) < +\infty$$

может выполняться лишь в случае $\sigma \neq 0$. Если же $\chi(X) = 0$, то (16) имеет смысл только при условии $\sigma \neq 0$. Мы можем, следовательно, считать, что, наряду с (16), выполнено соотношение (17).

Выберем теперь число $C_n(\delta)$ так, что при любом $\alpha > 0$

$$\frac{1}{n}\chi[C_n(\delta)(1+\alpha)] < \delta, \qquad \frac{1}{n}\chi[C_n(\delta)(1-\alpha)] \geqslant \delta.$$

Очевидно, что при этих условиях должно быть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nC_n^2(\delta)} H[C_n(\delta)] = \infty.$$

При достаточно больших n_r для $n > n_r$ (r — целое)

$$\frac{4}{C_n^2(\delta)} H\left(\frac{C_n(\delta)}{2}\right) > r\chi\left(\frac{C_n(\delta)}{2}\right) \geqslant n\delta r.$$

Но

$$H\left(\frac{C_n(\delta)}{2}\right) = \int_{-\frac{C_n(\delta)}{2}}^{0} z^2\, dM(z) + \int_{0}^{\frac{C_n(\delta)}{2}} z^2\, dN(z) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-C_n(\delta)}^{0} z^2\, dM(z) + \int_{0}^{C_n(\delta)} z^2\, dN(z) = H[C_n(\delta)],$$

следовательно,

$$\frac{1}{nC_n^2(\delta)} H[C_n(\delta)] \geqslant \frac{\delta r}{4}.$$

Существует такая последовательность $n_1' < n_2' < \ldots < n_r' < \ldots$, что для $n > n_r'$ при $\delta = \frac{1}{\sqrt{r}}$

$$\frac{1}{nC_n^2(\delta)} H[C_n(\delta)] \geqslant \frac{\sqrt{r}}{4}$$

и при любом $\alpha > 0$

$$\frac{1}{n} \chi[C_n(\delta)(1+\alpha)] < \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Обозначим $\Gamma_n = (1+\alpha) C_n\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ для $n_r' \leqslant n < n_{r+1}'$, тогда при $n \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n}\chi(\Gamma_n) \to 0, \\ &\frac{1}{n\Gamma_n^2} H(\Gamma_n) \to \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Положим

$$a_n^2 = \frac{1}{n} H(\Gamma_n).$$

Из сравнения с (18) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\Gamma_n} = \infty.$$

Таким образом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших n

$$a_n\varepsilon > \Gamma_n$$

и, значит,

$$\chi(\Gamma_n) \geqslant \chi(a_n\varepsilon)$$

и

$$H(\Gamma_n) \leqslant H(a_n\varepsilon).$$

Эти неравенства доказывают теорему.

Нам предстоит теперь выяснить, какие условия следует наложить на функции $M(u)$, $N(u)$ и постоянное σ для того, чтобы закон $F(x)$, определенный ими по формуле (2), был локально-устойчивым с параметром $\alpha \neq 2$. Из предыдущего мы знаем, что одним из необходимых условий этого является равенство нулю постоянного σ в формуле (2).

ТЕОРЕМА V. *Для того чтобы безгранично-делимый закон $F(x)$ был локально-устойчивым с параметром $\alpha \neq 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

1. $\sigma = 0$,
2. $\lim\limits_{u \to 0} \frac{M(-u)}{N(u)} = -\frac{c_1}{c_2}$,
3. *При любом постоянном* $k > 0$

$$\lim_{u \to 0} \frac{M(-ku) - N(ku)}{M(-u) - N(u)} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Доказательство. Согласно лемме II, закон $F(x)$ будет локально-устойчивым с параметром $\alpha \neq 2$ тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$

$$\left.\begin{aligned}
&1. \quad \frac{1}{n} M(a_n u) \to \frac{c_1}{|u|^\alpha} && \text{для } u < 0.\\
&2. \quad -\frac{1}{n} N(a_n u) \to \frac{c_2}{u^\alpha} && \text{для } u > 0.\\
&3. \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n a_n^2}\left(\sigma^2 + \int_{-\varepsilon a_n}^{0} u^2\, dM(u) + \int_0^{\varepsilon a_n} u^2\, dN(u)\right) = 0.\\
&4. \quad \frac{\gamma}{n a_n} - b_n \to \gamma_0.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Очевидно, что путем выбора постоянных b_n всегда можно добиться выполнения последнего требования.

Мы хотим показать, что из этих равенств следуют условия теоремы. Действительно, пусть $v \to 0$. Для каждого значения v мы можем подобрать столь большое n, что при заданном $u > 0$

$$a_n u \leqslant v \leqslant a_{n-1} u$$

(или $a_{n-1} u \leqslant v \leqslant a_n u$, если $a_{n-1} \leqslant a_n$). Отсюда следует, что

$$M(-a_n u) \geqslant M(-v) \geqslant M(-a_{n-1} u)$$

и

$$-N(a_n u) \geqslant -N(v) \geqslant -N(a_{n-1} u).$$

Таким образом,

$$-\frac{M(-a_n u)}{N(a_{n-1} u)} \geqslant -\frac{M(-v)}{N(v)} \geqslant -\frac{M(-a_{n-1} u)}{N(a_n u)}.$$

Первое и второе из соотношений (19) позволяют нам заключить, что

$$\lim_{n \to \infty}\left[-\frac{M(-a_n u)}{N(a_{n-1} u)}\right] = \lim_{n \to \infty}\left[-\frac{M(-a_{n-1} u)}{N(a_n u)}\right] = \frac{c_1}{c_2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{v \to 0}\left[-\frac{M(-v)}{N(v)}\right] = \frac{c_1}{c_2}.$$

Аналогичным путем можно обнаружить, что из двух первых соотношений (19) следует третье условие теоремы. Второе условие теоремы как мы уже говорили, следует из теоремы II.

Пусть теперь условия теоремы выполнены. Мы хотим показать, что закон $F(x)$ будет локально-устойчивым и что, стало быть, будут

иметь место равенства (19). С этой целью мы определим постоянные a_n как наименьшие корни неравенств

$$\chi[u(1+0)] \leq (c_1+c_2)n \leq \chi[u(1-0)]. \tag{20}$$

Так как второе условие теоремы имеет смысл только при $c_1+c_2>0$, то из (20) мы заключаем, что при $n\to\infty$ должно быть

$$\chi(a_n)\to\infty.$$

Это же возможно лишь в том случае, когда $a_n\to 0$. Из третьего условия теоремы следует, что при каждом $u>0$ должно быть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(ua_n)}{\chi[a_n(1+0)]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(ua_n)}{\chi[a_n(1-0)]}=\frac{1}{u^\alpha}.$$

Отсюда в силу (20) мы заключаем, что при $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{n}\chi(ua_n)\to\frac{c_1+c_2}{u^\alpha}. \tag{21}$$

Из второго условия теоремы мы выводим, что

$$M(-ua_n)=-\frac{c_1}{c_2}N(ua_n)[1+o(1)]. \tag{22}$$

Легко видеть, что (22) и (21) дают нам два первые соотношения (19). Нам остается показать, что имеет место третье из соотношений (19). Согласно третьему условию теоремы, для достаточно больших n при данных $\varepsilon>0$, $k>0$ и $\eta>0$ $\left(\frac{1+\eta}{k^{2-\alpha}}<1\right)$ имеют место равенства

$$\frac{\chi\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^s}\right)}{\chi\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}\right)}=(1+\eta_{is})\frac{1}{k^\alpha}, \tag{23}$$

где $|\eta_{is}|<\eta$ для всех натуральных $s>0$.

Пишем следующую цепочку соотношений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{na_n^2}\left(\int_{-\varepsilon a_n}^{0}u^2\,dM(u)+\int_{0}^{\varepsilon a_n}u^2\,dN(u)\right)=\\
&=\frac{1}{na_n^2}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\int_{-\frac{\varepsilon a_n}{k^s}}^{-\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}u^2\,dM(u)+\int_{\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}^{\frac{\varepsilon a_n}{k^s}}u^2\,dN(u)\right\}\leq\\
&\leq\frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\left\{\int_{-\frac{\varepsilon a_n}{k^s}}^{-\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}dM(u)+\int_{\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}^{\frac{\varepsilon a_n}{k^s}}dN(u)\right\}\leq\\
&\leq\frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\left\{\int_{-\infty}^{-\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}dM(u)+\int_{\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}}^{0}dN(u)\right\}=\\
&=\frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\left\{M\left(-\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}\right)-N\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}\right)\right\}=\frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\chi\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Так как в силу (23)

$$\chi\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^{s+1}}\right)=\frac{k^{\alpha}}{1+\eta_s}\chi\left(\frac{\varepsilon a_n}{k^{s}}\right)=\frac{k^{\alpha(s+1)}}{\prod\limits_{i=0}^{s}(1+\eta_i)}\chi(\varepsilon a_n),$$

то соотношение (24) мы можем продолжить следующим образом:

$$\frac{1}{na_n^2}\left(\int\limits_{-\varepsilon a_n}^{0}u^2\,dM(u)+\int\limits_{0}^{\varepsilon a_n}u^2\,dN(u)\right)\leqslant \varepsilon^2\,\frac{\chi(\varepsilon a_n)}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\cdot\frac{k^{\alpha(s+1)}}{\prod\limits_{i=0}^{s}(1+\eta_i)}\leqslant$$

$$\leqslant k^2\varepsilon^2\,\frac{\chi(\varepsilon a_n)}{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{[k^{2-\alpha}(1-\eta)]^{s+1}}=$$

$$=k^2\varepsilon^2\,\frac{\chi(\varepsilon a_n)}{\chi[a_n(1+0)]}\cdot\frac{\chi[a_n(1+0)]}{n}\sum\frac{1}{[k^{2-\alpha}(1-\eta)]^{s+1}}.$$

Но из третьего условия теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(\varepsilon a_n)}{\chi[a_n(1+0)]}=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}},$$

а в силу определения величин a_n

$$\frac{\chi[a_n(1+0)]}{n}\leqslant c_1+c_2,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}\left(\int\limits_{-\varepsilon a_n}^{0}u^2\,dM(u)+\int\limits_{0}^{\varepsilon a_n}u^2\,dN(u)\right)\leqslant$$

$$\leqslant(c_1+c_2)\,k^2\,\varepsilon^{2-\alpha}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{[k^{2-\alpha}(1-\eta)]^{s+1}}.$$

Отсюда находим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}\left(\int\limits_{-\varepsilon a_n}^{0}u^2\,dM(u)+\int\limits_{0}^{\varepsilon a_n}u^2\,dN(u)\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

Очередной вопрос о локальном поведении однородных случайных процессов с независимыми приращениями таков: найти класс предельных законов для величин

$$\frac{x(t_k)}{a_{t_k}}-b_{t_k}$$

при соответствующем подборе постоянных

$$a_{t_k}>0,\ b_{t_k}\quad\text{и}\quad t_k>0\ (\lim_{k\to\infty}t_k=0).$$

Повидимому, этот класс шире класса устойчивых законов, но уже класса безгранично-делимых законов.

Примечание. Задачи, поставленные нами в начале работы, были даны в двух близких, но все же различных формулировках. Согласно первой из них, нам нужно было определить предельные закономерности, которым подчиняются функции распределения величин (4) при непрерывном стремлении к нулю параметра t. Во второй формулировке следовало найти эти предельные закономерности, когда t стремится к нулю лишь по последовательности $t_n = \frac{1}{n}$. Приведенные выше доказательства относились лишь к последней постановке. Для полной законченности наших рассуждений нам нужно доказать следующее предложение.

ЛЕММА IV. *Если можно подобрать такие постоянные $a_{1/n} > 0$ и $b_{1/n}$, что функции распределения величин* (4) *сходятся к предельной функции распределения, когда $t \to 0$, принимая лишь значения $t_n = \frac{1}{n}$, то можно подобрать такие постоянные $a_t > 0$ и b_t, что функции распределения величин* (4) *сходятся к предельной функции распределения при непрерывном стремлении к нулю параметра t. Предельные функции распределения в обоих случаях совпадают.*

Доказательство. Пусть $\psi(\lambda)$ — логарифм характеристической функции случайного процесса $\xi(t)$. Нам дано, что при некотором подборе постоянных $a_{1/n}$ и $b_{1/n}$ равномерно в каждом конечном интервале λ при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{n} \psi\left(\frac{\lambda}{a_{1/n}}\right) - i b_{1/n} \lambda \to \psi_0(\lambda),$$

где $\psi_0(\lambda)$ означает логарифм характеристической функции предельного закона. Положим

$$a_t = a_{1/n}, \qquad b_t = b_{1/n} n t$$

для всех t, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда при этих значениях t мы имеем следующее равенство

$$t\psi\left(\frac{\lambda}{a_t}\right) - i b_t \lambda = nt \left[\frac{1}{n} \psi\left(\frac{\lambda}{a_{1/n}}\right) - i b_{1/n} \lambda\right].$$

Заставим теперь t стремиться к 0. Тогда, так как $\frac{n}{n+1} < tn \leqslant 1$, то tn стремится к единице и в силу условия леммы равномерно в каждом конечном интервале λ при $t \to 0$

$$t\psi\left(\frac{\lambda}{a_t}\right) - i b_t \lambda \to \psi_0(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 III 1942

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б. В., К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., № 2 (1939), 181—232.

[2] Гнеденко Б. В., К теории областей притяжения устойчивых законов, Ученые записки МГУ, математика, вып. 30 (1939), 61—81.

[3] Гнеденко Б. В., Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда, ДАН, т. XXXII, № 1 (1941), 6—9.

[4] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.

[5] Хинчин А. Я., О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., № 5 (1939), 487—508.

B. V. GNEDENKO. LOCALLY STABLE DISTRIBUTIONS

SUMMARY

Under a stochastic process with independent increases we understand the set of random variables depending on the real parameter and satisfying the conditions:

1) the distribution functions of the variables $x(t_0+t)-x(t_0)$ do not depend on t_0;

2) the increases of $x(t)$ corresponding to any number of non intersecting t-intervals are mutually independent.

If we assume also: $x(0)=0$, then the homogeneous random process with independent increases is completely determined by the distribution function of $x(1)-x(0)$; as it is known, the logarithm of its characteristic function is given by the formula (1) or that is equivalent, by (2). The purpose of to present paper is to solve the following problems: 1) to determine the possible limit distributions for the distribution of the variables (4) (when $t \to 0$) for the various $a_n > 0$ and B_n, 2) to establish the conditions of the convergence of distributions of (4) to each fixed limit distribution.

The following results are obtained:

THEOREM I. *In order that the distribution* $\Phi(x)$ *be the limit distribution for* (4) *it is necessary and sufficient that* $\Phi(x)$ *is stable.*

THEOREM IV. *In order that the distribution functions of the variables* (4) (*with* $a_n > 0$ *and* B *conveniently chosen*) *converge to the Gaussian distribution it is necessary and sufficient that* (10) *holds with* $G_n(u)$ *determined by* (1).

THEOREM V. *The distribution functions of the variables* (4) *converge to a stable distribution that is not Gaussian if and only if the following conditions are satisfied:*

1. $\sigma=0$;
2. $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{M(-u)}{N(u)}=c \qquad (-\infty \leq c \leq 0)$;
3. *for any constant* $\quad k > c$

$$\lim_{u\to 0} \frac{M(-ku)-N(ku)}{M(-u)-N(u)} = \frac{1}{k^{\alpha}},$$

$M(u)$ and $N(u)$ *being determined by* (2).

The random process $x(\lambda)$ is said to follow the iterated logarithm law if the equality

$$\limsup_{\lambda \to 0} \frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{2\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}} = 1$$

holds with probability 1.

THEOREM III. *The homogeneous random process with independent increases follows the iterated logarithm law if and only if the distribution functions of the variables* (4) *converge to the Gaussian distribution when* $\lambda \to 0$ *with* $a_n = \frac{a}{\sqrt{n}}$, $a > 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1942), 309—330 Série mathématique

М. В. КЕЛДЫШ

О МЕТОДЕ Б. Г. ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В статье дается доказательство сходимости метода Галеркина для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений.

В 1915 г. Б. Г. Галеркин предложил метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, который был им применен к решению ряда задач об устойчивости упругих систем ([1]). Впоследствии выяснилось, что в случае вариационных задач этот метод по существу совпадает с методом Ритца. Однако способ применения этого метода, предложенный Галеркиным, не связан с вариационной задачей, определяющей дифференциальные уравнения, и может быть приложен и к несамосопряженным уравнениям. В последнее время метод Галеркина получил весьма широкое распространение в применении к несамосопряженным системам при изучении неконсервативных механических систем и неизменно приводил к хорошим результатам.

Метод Ритца для решения вариационных задач получил обоснование в простейших случаях еще в работах самого Ритца. После работы Ритца этому методу был посвящен целый ряд исследований и особенно глубоко он был изучен в фундаментальных работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. На ряду с этим, насколько нам известно, применение метода Галеркина к несамосопряженным системам до сих пор не получил обоснования. В ряде мест даже высказывались сомнения в законности его применения ([2,3]). Недавно появилась работа Г. И. Петрова ([4]), где было дано обоснование метода Галеркина для некоторых частных случаев путем сведения исследования о сходимости к изучению бесконечной системы линейных уравнений.

Мы также используем связь метода Галеркина с системами линейных уравнений и в широком классе случаев даем доказательство сходимости этого метода при существенно необходимых ограничениях, наложенных на систему приближающих функций.

В § 1 рассматривается общее обыкновенное дифференциальное уравнение $2n$-го порядка, причем мы ограничиваемся простейшими граничными условиями. Перенесения доказательств на другие граничные условия не представляет существенных трудностей.

В § 2 детально разбираются для уравнения 2-го порядка все граничные условия, связывающие значения функций и производной на каждом из концов интервала.

В § 3 рассматривается задача Дирихле для уравнений с частными производными. В этом случае при общих ограничениях, наложенных на систему функций, уже не имеет места равномерная сходимость решений; устанавливается их сходимость в среднем и сходимость собственных значений. Само исследование бесконечной системы в этом случае становится также значительно сложнее.

§ 1. Уравнения $2n$-го порядка

Рассмотрим на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ уравнение $2n$-го порядка

$$L(y) = p(x)\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + \sum_{i=0}^{2n-1} p_i(x, \lambda)\frac{d^i y}{dx^i} = f(x), \tag{1}$$

зависящее от параметра λ, изменяющегося в области D комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения предполагаются непрерывными функциями x и λ, когда x изменяется на интервале $(0,1)$, а λ в области D, и аналитическими функциями λ в D. Мы будем предполагать, что коэффициенты дифференцируемы по x столько раз, сколько это нам в дальнейшем потребуется и что

$$p(x) > 0.$$

Рассмотрим систему S, образованную уравнением (1) и простейшими граничными условиями

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

При фиксированном λ система S, как известно, либо имеет решение при любом значении правой части (1), либо однородная система S [получаемая при $f(x) = 0$] допускает решения, отличные от нуля. Значения λ, при которых имеет место последнее обстоятельство, носят название собственных значений.

Академик Б. Г. Галеркин предложил метод решения системы S, требующий для построения каждого приближения решения системы алгебраических линейных уравнений. Этот метод сводится к следующему. Пусть

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \; \ldots, \; \varphi_m(x), \; \ldots \tag{3}$$

система функций, удовлетворяющих граничным условиям (2). Положим

$$y_m = x_1^{(m)}\varphi_1(x) + x_2^{(m)}\varphi_2(x) + \ldots + x_m^{(m)}\varphi_m(x) \tag{4}$$

и построим для определения констант $x_k^{(m)}$ систему линейных алгебраических уравнений следующим образом:

$$\int_0^1 [L(y_m) - f]\varphi_i dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5}$$

Система эта имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{m} c_{ik}(\lambda)\, x_k^{(m)} - f_i = 0, \tag{6}$$

и коэффициенты ее суть голоморфные функции λ в D.

Собственные значения системы S ищутся как пределы собственных чисел системы (6) алгебраических уравнений и, если λ не есть собственное число системы S, ее решение ищется как предел последовательности

$$y_1(x),\ \ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x), \ldots \tag{7}$$

с коэффициентами, определенными из уравнений (6).

Как известно, в том случае, когда уравнение (1) может быть получено как уравнение Эйлера для действительного функционала, метод академика Галеркина совпадает с методом Ритца для решения соответствующей вариационной задачи. Однако в отличие от метода Ритца метод академика Галеркина применим и к несамосопряженным уравнениям и к уравнениям с комплексными коэффициентами.

Мы докажем следующее предложение:

Если система функций, составленная из n первых степеней x и из n-ых производных от функций последовательности (3)

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1},\ \varphi_1^{(n)},\ \varphi_2^{(n)},\ \ldots,\ \varphi_m^{(n)}, \ldots \tag{8}$$

полна в смысле среднего квадратичного уклонения, то

1. *Собственные значения системы S получаются предельным переходом из собственных значений систем* (6).

2. *Собственные функции системы S получаются как пределы последовательности* (7) *с коэффициентами, полученными из решения однородных уравнений* (6) *соответствующих собственным числам системы* (6).

3. *Если λ не есть собственное число системы S, решение S есть предел последовательности* (7) *с коэффициентами, определенными из* (6) *при том же значении λ.*

Производные $y_m^{(j)}(x)$ при $j < n$ сходятся равномерно к соответствующим производным решения y, а $y_m^{(n)}(x)$ сходится в среднем к $y^{(n)}(x)$.

Для доказательства заметим, что уравнение (1) всегда можно записать в виде

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(py^{(n)}\right) + \frac{d^n}{dx^n}\sum_{j=0}^{n-1} q_j(x, \lambda)\, y^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(x, \lambda)\, y^{(j)} = f(x). \tag{1'}$$

Далее, при доказательстве можно предполагать, что функции $\varphi_m^{(n)}(x)$ образуют нормированную ортогональную систему с весом $p(x)$

$$\int_0^1 p\varphi_m^{(n)}\varphi_k^{(n)}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq k; \\ 1, & m = k. \end{cases} \tag{9}$$

В самом деле, если это не выполняется, то можно построить новую систему функций $\psi_m(x)$, полученную из системы (3) линейным пре-

образованием, приводящим к ортогонализации системы n-ых производных функций (3)

$$\psi_m = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{mk} \varphi_k, \qquad \varphi_m = \sum_{i=0}^{m} \beta_{mk} \psi_k.$$

Система алгебраических уравнений m-го приближения, получаемая исходя из последовательности функций ψ_m, может быть выведена из системы (6) путем замены переменных

$$y_i^{(m)} = \sum_{k=i}^{m} \beta_{ki} x_k^{(m)}$$

и образования линейных комбинаций уравнений системы (6)

$$\overline{\Lambda}_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} \Lambda_k.$$

Отсюда вытекает, что собственные значения системы (6) и $\overline{\Lambda}_i = 0$ совпадают, а последовательность (7) не изменяется при переходе от последовательности φ_m к последовательности ψ_m.

Отметим некоторые свойства разложений по системе функций $\varphi_m^{(n)}(x)$. В силу граничных условий (2) каждая функция $\varphi_m^{(n)}(x)$ ортогональна ко всем степеням x^k при $k < n$,

$$\int_0^1 x^k \varphi_m^{(n)}(x)\, dx = 0, \qquad k < n$$

Отсюда и из полноты системы функций (8) вытекает, что всякая функция $f(x)$, ортогональная ко всем $\varphi_m^{(n)}$,

$$\int_0^1 f\varphi_m^{(n)}\, dx = 0,$$

есть полином $(n-1)$-ой степени

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

а всякая функция $g(x)$, ортогональная к первым степеням x,

$$\int_0^1 g x^k\, dx = 0, \qquad k < n,$$

может быть приближена в среднем линейными комбинациями функций $\varphi_m^{(n)}$. В частности, если система $\varphi_m^{(n)}$ ортогонализирована с весом $p(x)$, разложение $g(x)$ в ряд Фурье по функциям $\varphi_m^{(n)}$ сходится в среднем к $g(x)$.

Если функции $\varphi_m^{(n)}(x)$ ортогональны, то в силу граничных условий

$$\int_0^1 \varphi_k \frac{d^n}{dx^n}(p\varphi_m^{(n)})\,dx = (-1)^n \int_0^1 p\varphi_k^{(n)}\varphi_m^{(n)}\,dx = \begin{cases} (-1)^n, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Следовательно система (6) может быть записана в виде

$$x_i^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}(\lambda)\,x_k^{(m)} - f_i = 0, \tag{10}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n A_{ik} &= \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^n}{dx^n}(q_j\varphi_k^{(j)}) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j\varphi_k^{(j)}\right]\varphi_i\,dx = 0, \\ (-1)^n f_i &= \int_0^1 f\cdot\varphi_i\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Для дальнейшего мы положим

$$A_{ik} = a_{ik} + b_{ik},$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{ik} &= \int_0^1 \varphi_i^{(n)} \sum_{j=0}^{n-1} q_j\varphi_k^{(j)}\,dx, \\ b_{ik} &= (-1)^n \int_0^1 \varphi_i \sum_{j=0}^{n-1} r_j\varphi_k^{(j)}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Выражение a_{ik} получается n-кратным интегрированием по частям слагаемого A_{ik}, соответствующего первому члену квадратной скобки.

Система (10) получается усечением бесконечной системы линейных уравнений

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik}(\lambda)\,x_k - f_i = 0. \tag{13}$$

Докажем, что система (13) эквивалентна системе S в следующем смысле: решению $y(x)$ системы S соответствует решение системы (13)

$$x_k = \int_0^1 py^{(n)}\varphi_k^{(n)}\,dx \tag{14}$$

со сходящейся суммой квадратов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^2| < +\infty,$$

и обратно, всякому решению системы (13) со сходящейся суммой квадратов соответствует решение системы S. В частности собственные значения системы (13) и системы S совпадают.

Пусть $y(x)$ — решение системы S. Разложим $y^{(n)}$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\varphi_m^{(n)}(x)$. Определяя коэффициенты по формулам (14), получаем сходящееся в среднем разложение

$$y^{(n)}(x) \approx \sum_{m=1}^{\infty} x_m \varphi_m^{(n)}(x), \tag{15}$$

так как $y^{(n)}(x)$, в силу граничных условий, ортогональна к

$$1, \quad x, \quad x^2, \ldots, x^{n-1}.$$

Интегрируя это разложение и определяя константы из граничных условий, получим равномерно сходящиеся разложения

$$y^{(j)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \varphi_m^{(j)}, \qquad j < m. \tag{15'}$$

Умножая уравнение (1′) на $\varphi_i(x)$ и интегрируя по промежутку $(0, 1)$, после интегрирования по частям получим следующее соотношение:

$$\int_0^1 \left[p y^{(n)} \varphi_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j y^{(j)} \varphi_i^{(n)} + (-1)^n \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j y^{(j)} \varphi_i - (-1)^n f \varphi_i \right] dx = 0. \tag{16}$$

Подставляя сюда разложения (15) и (15′) и производя почленную интеграцию рядов, убеждаемся, что x_k удовлетворяют системе (13).

Обратно, допустим, что x_k есть решение системы (13) со сходящейся суммой квадратов. Пользуясь теоремой Фишера—Рисса, мы образуем функцию $\eta(x)$ с разложением в ряд по ортогональной системе $\varphi_m^{(n)}$

$$\eta(x) \approx \sum_{m=1}^{\infty} x_m \varphi_m^{(n)}(x) \tag{17}$$

и положим

$$y(x) = \sum_{m=1} x_m \varphi_m(x).$$

Полученный ряд и его производные порядка $< n$ сходятся равномерно, так как они получаются интегрированием ряда (17) и кроме того

$$y^{(n)}(x) = \eta(x)$$

почти всюду. Функция $y(x)$ очевидно удовлетворяет граничным условиям, и надо доказать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1′). Из определения $y(x)$ следует, что уравнения (13) можно записать в виде (16). Интегрируя n раз по частям последние два члена интегрального выражения (16), получим

$$\int_0^1 \left[p y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j y^{(j)} + \int_0^x \ldots \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_j y^{(j)} - f \right) dx^n \right] \varphi_i^{(n)} dx = 0.$$

Отсюда вытекает, что функция, стоящая в квадратных скобках, как ортогональная ко всем $\varphi_m^{(n)}$, будет многочленом степени $n-1$,

$$py^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}q_jy^{(j)}+\int_0^x\ldots\int_0^x\sum_{j=0}^{n-1}r_jy^{(j)}\,dx^n=C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n.$$

Дифференцируя это соотношение n раз, убеждаемся, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1).

Докажем теперь, что собственные значения системы (13) получаются предельным переходом из собственных значений системы (10), а решения $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ системы (13) получаются предельным переходом из решений $x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$ системы (10), причем имеет место сильная сходимость

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_k^{(m)}|^2=0. \tag{18}$$

В силу результатов Коха о линейных системах для этого достаточно установить, что ряд

$$\sum_{i,\,k}|A_{ik}(\lambda)|^2 \tag{19}$$

равномерно сходится в области D ([1]). Из (18) непосредственно вытекает, что последовательность $y_m^{(n)}$ сходится в среднем к n-ой производной решения S, а $y_m^{(j)}$ при $j<n$ сходится равномерно к $y^j(x)$.

Мы докажем, что ряд (19) сходится внутри области D изменения λ и сумма его внутри D равномерно ограничена.

Так как члены ряда (19) суть квадраты модулей аналитических функций, то отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (19) внутри D*.

Достаточно доказать сходимость и ограниченность суммы рядов

$$\sum_{i,\,k}|a_{ik}|^2,\qquad \sum_{i,\,k}|b_{ik}|^2.$$

Рассмотрим первый из этих рядов. На основании неравенства Бесселя, для ортогональной с весом $p(x)$ системы $\varphi_m^{(n)}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}|^2\leqslant\int_0^1\left|\sum_{j=0}^{n-1}q_j\varphi_k^{(j)}(x)\right|^2\frac{dx}{p(x)},$$

так как a_{ik} есть i-ый коэффициент Фурье функции

$$\frac{1}{p(x)}\sum_{j=0}^{n-1}q_j\varphi_k^{(j)}.$$

---

* Последнее вытекает хотя бы из того, что во всякой подобласти D ряд (19) можно мажорировать рядом гармонических функций с ограниченной суммой, и из теоремы Харнака.

Таким образом

$$\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \Big| \sum_{j=0}^{n-1} q_j \varphi^{(j)}(x) \Big|^2 \frac{dx}{p(x)}. \tag{20}$$

Выразив $\varphi_k^{(j)}(x)$ через $\varphi_k^{(n)}(x)$ формулой

$$\varphi_k^{(j)}(x) = \frac{1}{(n-j-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-j-1} \varphi_k^{(n)}(t)\, dt,$$

получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} q_j \varphi_k^{(j)}(x) = \int_0^x \Big(\sum_{j=0}^{n-1} q_j(x) \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \Big) \varphi_k^{(n)}(t)\, dt,$$

следовательно, левая часть этого равенства есть коэффициент Фурье функции от t, получаемой делением скобки, стоящей под знаком интеграла, на $p(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant x$ и равной нулю при $x < t \leqslant 1$.

На основании неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=0}^{n-1} q_j \varphi_k^{(j)} \Big|^2 \leqslant \int_0^x \Big| \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x, \lambda) \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \Big|^2 \frac{dt}{p(t)}$$

в силу (20)

$$\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{p(x)} \int_0^x \Big| \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x) \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \Big|^2 \frac{dt}{p(t)}.$$

Отсюда вытекает, что ряд $\sum |a_{ik}|^2$ сходится, а сумма его ограничена внутри области D.

Рассмотрим теперь ряд $\sum |b_{ik}(\lambda)|^2$. Пользуясь выражением для b_{ik}, в силу неравенства Шварца, находим

$$|b_{ik}|^2 \leqslant \int_0^1 |\varphi_i|^2\, dx \cdot \int_0^1 \Big| \sum_{j=0}^{n-1} r_j \varphi_k^{(j)} \Big|^2 dx,$$

откуда

$$\sum_{i,k} |b_{ik}|^2 \leqslant \sum_{(i)} \int_0^1 |\varphi_i|^2\, dx \cdot \sum_{(k)} \int_0^1 \Big| \sum_{j=1}^{n-1} r_j \varphi_k^{(j)} \Big|^3 dx;$$

вычисляя стоящие справа суммы так же, как это делалось выше, найдем

$$\sum_{i,k} |b_{ik}|^2 \leqslant \int_0^1 \int_0^x \Big| \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Big|^2 \frac{dt}{p(t)} \frac{dx}{p(x)} \cdot \int_0^1 \int_0^x \Big| \sum_{j=0}^{n-1} r_j(x) \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \Big|^2 \frac{dt}{p(t)} \frac{dx}{p(x)},$$

что доказывает ограниченность суммы ряда, стоящего в правой части.

Этим вполне доказывается высказанное выше предложение о сходимости метода Б. Г. Галеркина.

§ 2. Уравнение 2-го порядка

Остановимся подробнее на случае уравнений 2-го порядка. Рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$\frac{d}{dx}(py') + \frac{d}{dx}[q(x, \lambda)y] + r(x, \lambda)y = 0, \tag{21}$$

удовлетворяющее условиям § 1, и рассмотрим граничные условия вида

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= h_0 y(0) \\ y'(1) &= h_1 y(1) \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Мы докажем сходимость метода Галеркина при следующих условиях, наложенных на систему (3):

а) функции $\varphi_m(x)$ дважды дифференцируемы и удовлетворяют граничным условиям (22),

б) система из производных $\varphi_m'(x)$, дополненная функцией $\psi(x)$, определенной равенствами

$$\psi(0) = h_0^{-1}, \quad \psi(1) = -h_1^{-1},$$
$$\psi(x) = 1, \qquad 0 < x < 1,$$

если ни одно из чисел h_0, h_1 не равно нулю и

$$\psi(x) = 0$$

при $h_0 = 0$ или $h_1 = 0$, полна в пространстве с расстоянием

$$\rho(f,g) = \int_0^1 p\,|f - g|^2\,dx + \epsilon_0\,|f(0) - g(0)|^2 + \epsilon_1\,|f(1) - g(1)|^2,$$

где $\epsilon_i = 1$, если h_i отлично от нуля и бесконечности, и $\epsilon_i = 0$, если $h_i = 0$ или $h_i = \infty$,

с) если $h_0 = h_1 = 0$, система пар функций (φ_i, φ_i') полна в пространстве пар $\left(\int y\,dx, y\right)$, где y — функция с суммируемым квадратом, а расстояние определяется формулой

$$\rho(f, g) = \int_0^1 (p\,|f - g|^2\,dx + |F(0) - G(0)|^2,$$

где

$$F(x)\int f\,dx, \quad G(x) = \int g\,dx.$$

В частности условие с) выполнено, если система производных $\{\varphi_n'(x)\}$ полна и система функций (3) содержит единицу.

Мы остановимся на случае, когда h_0, h_1 отличны от нуля и бесконечности. Остальные случаи рассматриваются подобным же образом.

Пусть h_i конечны ($h_i \neq 0, \infty$). Систему производных от функций последовательности (3) мы можем считать ортогональной в пространстве с расстоянием $\rho(f, g)$

$$\int_0^1 p\varphi_i'\varphi_k'\,dx + \varphi_i'(0)\,\varphi_k'(0) + \varphi_i'(1)\,\varphi_k'(1) = 0.$$

Рассмотрим разложение в ряд Фурье функции f с конечной нормой $\rho(f, 0)$:

$$f \approx \sum c_i \varphi_i'. \tag{23}$$

Это разложение сходится в пространстве с расстоянием $\rho(f, g)$. Из определения расстояния следует, что это разложение сходится в среднем на интервале $0 < x < 1$, а в точках $x = 0$ и $x = 1$ сходится в обычном смысле.

В силу граничных условий (22) легко показать, что функции $\varphi_m'(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\int_0^1 \psi\varphi_m'\, dx + \psi(0)\,\varphi_m'(0) + \psi(1)\,\varphi_m'(1) = 0.$$

Имея в виду, что система функций

$$\psi,\ \varphi_1',\ \varphi_2', \ldots, \varphi_m', \ldots$$

полна в пространстве с расстоянием

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f - g|^2 dx + |g(0) - f(0)|^2 + |g(1) - f(1)|^2,$$

заключаем, что

всякая функция f, удовлетворяющая соотношениям

$$\int_0^1 f\varphi_m'\, dx + f(0)\,\varphi_m'(0) + f(1)\,\varphi_m'(1) = 0,$$

имеет вид $f = C\psi$; всякая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^1 f\psi\, dx + f(0)\,\psi(0) + f(1)\quad 1) = 0, \tag{24}$$

принадлежит к линейному пространству, определяемому функциями φ_m'. В частности ряд Фурье (23) сходится к f в пространстве с расстоянием $\rho(f, g)$.

Бесконечная система (10), сечением которой получаются уравнения для n-ого приближения Галеркина, может быть получена из соотношений

$$\int_0^1 \{L(y) - f\}\,\varphi_i\, dx = [(py' + qy)\,\varphi_i]_0^1 - $$
$$- \int_0^1 [(py' + qy)\,\varphi_i' - (ry + f)\varphi_i]\, dx = 0 \tag{25}$$

формальной постановкой рядов

$$y = \sum x_i \varphi_i, \quad y' = \sum x_i \varphi_i'. \tag{26}$$

Если $y(x)$ есть решение системы S, то y' удовлетворяет соотношению (24) в силу граничных условий, и поэтому разложение сходится к y' по расстоянию $\rho(f, g)$. Разложение для y сходится равномерно в силу сходимости в среднем ряда для y' на (0,1) и сходимости ряда

$$\sum x_i\varphi_i(0) = \frac{1}{h_0}\sum x_i\varphi_i'(0).$$

Отсюда следует законность формальной подстановки рядов (26) в (25), а поэтому решению системы S соответствует решение уравнений (10) со сходящейся суммой квадратов

$$x_i = \int_0^1 py'\varphi_i'\,dx + y'(0)\,\varphi_i'(0) + y'(1)\,\varphi_i'(1).$$

Обратно, если имеем решение системы (10) со сходящейся суммой квадратов, то полагаем

$$y = \sum x_i\varphi_i, \quad y_1 = \sum x_i\varphi_i'.$$

Второе из этих разложений сходится по расстоянию $\rho(f, g)$, а первое равномерно. Функция y есть интеграл от y_1, поэтому удовлетворяется соотношение, полученное из (25) заменой y' на y_1, в проинтегрированных членах (при $x=0, 1$). Интегрируя по частям это соотношение и пользуясь граничными условиями для φ_i, получим

$$\int_0^1 \left[py' + qy + \int_0^x (ry - f)\,dx\right]\varphi_i'\,dx + \frac{\varphi'(0)}{h_0}\,[py_1(0) + qy(0)] -$$
$$- \frac{\varphi_i'(1)}{h_1}\left[py_1 + qy + \int_0^x [ry - f]\,dx\right]_{x=1} = 0,$$

откуда вытекает

$$py' + qy + \int_0^x (ry - f)\,dx = C,$$
$$[py_1 + qy]_{x=0} = C,$$
$$[py_1 + qy]_{x=1} + \int_0^1 (ry - f)\,dx = C.$$

Первое из этих соотношений показывает, что y есть решение уравнения, а из сравнения первого с другими следует

$$y'(0) = y'(0), \quad y^1(1) = y_1(1),$$

и в силу разложения для y и y_1, сходящихся при $x=0,1$. Функция y удовлетворяет граничным условиям.

Чтобы завершить доказательство, надо еще установить сходимость ряда (19). Имеем

$$A_{ik} = [p\varphi_k'\varphi_i + q\varphi_i\varphi_k - \varphi_k'\varphi_k]_{x=0} - [p\varphi_k'\varphi_i + q\varphi_i\varphi_k + \varphi_i'\varphi_k']_{x=0} +$$
$$+ \int_0^1 [q\varphi_i'\varphi_k - r\varphi_i\varphi_k]\,dx.$$

Доказательство сходимости ряда протекает вполне аналогично тому, как это делалось в § 1, только надо иметь в виду граничные условия для функций φ_i, а также, что выражение вида

$$C\varphi_i'(0) + K\varphi_i' + (1) \int_0^1 f\varphi_i'\,dx$$

есть коэффициент Фурье функции, равной C при $x=0$, K при $x=1$ и $f(x)$ при $0<x<1$.

§ 3. Задача Дирихле для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим в области D пространства n измерений $x(x_1, \ldots, x_n)$ уравнение эллиптического типа

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu = f \quad (p_{ik} = p_{ki}), \tag{27}$$

коэффициенты A_i, B которого зависят линейно от параметра λ, при граничном условии

$$u = 0 \tag{28}$$

на границе Γ области D.

Коэффициенты уравнения (27) будут предполагаться непрерывными и имеющими достаточно большое число частных производных по x_i, а граница области D имеющей непрерывную кривизну. В силу эллиптичности уравнения, квадратичная форма

$$\sum p_{ik} \xi_i \xi_k \tag{29}$$

положительна, и мы будем предполагать, что она не вырождается и на границе Γ области D.

Уравнение (27) будем в дальнейшем записывать в следующем виде:

$$L(u) = \sum_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k} p_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{(i)} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = f, \tag{30}$$

$$a_i = a_i' + \lambda a_i'', \qquad b_i = b_i' + \lambda b_i''.$$

Пусть

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{31}$$

система функций, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих граничному условию. Так же как и в случае обыкновенного уравнения, метод Галеркина состоит в отыскании приближений для решения задачи в виде

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} y_k^{(m)} \varphi_k, \tag{32}$$

причем константы $y_k^{(m)}$ определяются из системы уравнений

$$\int\limits_{(D)} (L(u_m)-f)\varphi_j\,dx=0. \tag{33}$$

Предположим, что функции (31) удовлетворяют следующему условию C. Какова бы ни была функция $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ с интегрируемым квадратом градиента

$$\int\limits_{(D)} |\operatorname{grad}\Phi|^2\,dx<+\infty,$$

обращающаяся в нуль на границе Г, существует последовательность линейных комбинаций Φ_m из функций (31), градиенты которых сходятся в среднем к градиенту Φ,

$$\lim_{m\to\infty}\int |\operatorname{grad}(\Phi-\Phi_m)|^2\,dx=0. \tag{34}$$

Тогда собственные значения уравнения (30) получаются предельным переходом из собственных значений системы (33), а градиенты функций (32) сходятся в среднем к градиенту решения уравнения (30).

Заметим, что условие C эквивалентно следующему требованию:

Система векторных полей, составленная из

a) градиентов функций φ_m,

b) всех векторов вида

$$P_i=0\quad(i\neq j,\,k),\quad P_j=\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_k},\quad P_k=-\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j},$$

c) градиентов всех гармонических полиномов,

полна в пространстве векторных полей $P(P_1, P_2,\ldots,P_n)$ с расстоянием

$$\rho(P',P'')=\int\limits_{(D)}\sum_{i=1}^{n}|P_i'-P_i''|^2\,dx.$$

При доказательстве высказанного предложения можно предполагать, что градиенты системы функций (31) ортогонализированы в следующем смысле

$$\int\limits_{(D)}\sum_{i,k} p_{ik}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}\cdot\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}}\,dx=\begin{cases}1, & m=j,\\ 0, & m\neq j.\end{cases} \tag{35}$$

Для всякого вектора P можно построить коэффициенты Фурье по формулам

$$y_m=\int\limits_{D}\sum p_{ik}P_i\overline{\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_k}}\,dx. \tag{36}$$

Если вектор P есть градиент функции, обращающейся в нуль на границе D, или аппроксимируется в среднем градиентами таких функций, то имеет место, в смысле сходимости в среднем, равенство

$$P=\sum_{j=1}^{\infty} y_j\operatorname{grad}\varphi_i. \tag{37}$$

Необходимым и достаточным условием сходимости в среднем ряда (37) к некоторому вектору указанного типа является сходимость ряда $\sum |y_j|^2$.

Вместе с рядом (37) мы будем рассматривать также ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j \varphi_j. \tag{38}$$

Из сходимости в среднем ряда $\sum |y_j|^2$ следует сходимость в среднем ряда (38). В самом деле, обозначая через l_x отрезок параллельный оси x_1, соединяющий точку x с контуром Γ, и имея в виду, что φ_j обращается в нуль на Γ, имеем

$$\left| \sum y_j \varphi_j \right| = \left| \int_{l_x} \sum y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} dx_1 \right| \leqslant \sqrt{\delta \cdot \int_{l_x} \left| \sum y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right|^2 dx_1},$$

где δ—диаметр области D.

Поэтому

$$\int_{(D)} \left| \sum y_j \varphi_j \right|^2 dx \leqslant \delta \int_{(D)} \left| \sum y_j \operatorname{grad} \varphi_j \right|^2 dx,$$

имея в виду, что

$$\sum_{i,k} p_{ik} \xi_i \xi_k > k \sum_{(i)} \xi_i^2$$

и в силу ортогональности градиентов φ_j,

$$\int_{(D)} \left| \sum y_j \varphi_j \right| dx \leqslant \frac{\delta}{k} \int_{(D)} \sum_{i,k} p_{ik} \sum_{(i)} y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \sum_{(g)} y_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i} dx < \frac{\delta}{k} \sum |y_j^2|. \tag{39}$$

Из этого неравенства непосредственно следует сходимость в среднем ряда (38).

Из (39) также следует, что из сходимости в среднем последовательности

$$P^{(m)} = \sum y_j^{(m)} \operatorname{grad} \varphi_j \tag{40}$$

вытекает сходимость в среднем последовательности

$$\varphi_m = \sum y_j \varphi_j. \tag{41}$$

Нам понадобится еще следующее утверждение: если последовательность (40) слабо сходится к нулю, то и последовательность (41) сходится слабо к нулю. Слабая сходимость (40) к нулю означает, что ограничены нормы

$$\int_{(D)} \sum_{(i)} |P_j^{(m)}|^2 dx$$

и для любого вектора Q с ограниченной нормой

$$\lim_{m \to \infty} \int_{D} \sum_{(i)} Q_i P_i^{(m)} dx = 0.$$

Из (39) следует ограниченность норм функций ψ_m; поэтому для установления слабой сходимости (41) надо только показать, что для всякой функции g с интегрируемым квадратом

$$\lim_{m\to\infty}\int_D g\psi_m\,dx = 0. \tag{42}$$

Очевидно, что (42) достаточно установить для непрерывных функций g. Переходя к пределу в равенстве

$$\int_D g\cdot\sum y_j\varphi_j\,dx = \int_D G\sum y_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1},$$

где

$$G = \int_0^x g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1,$$

получим

$$\int_D \psi_m g\,dx = \int_D P_1^{(m)}G\,dx,$$

откуда следует равенство (42).

Рассмотрим уравнение

$$\Lambda(U) = \sum_{(i)}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{(k)}p_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{43}$$

В силу предположений, сделанных относительно коэффициента p_{ik}, существует функция Грина для уравнения (43), с помощью которой решение уравнения записывается в виде

$$U = \int_D G(x,\xi)F(\xi)\,d\xi. \tag{44}$$

Формула (44) дает решение задачи Дирихле для уравнения (43), если функция $F(\xi)$ удовлетворяет условию Hölder'a

$$|F(\xi') - F(\xi'')| < k\,|\xi'\xi''|^{\lambda}, \qquad 0 < \lambda \leq 1,$$

где $|\xi'\xi''|$ — расстояние между точками ξ', ξ''. В частности (44) удовлетворяет уравнению (43), если функция $F(\xi)$ имеет ограниченные частные производные.

Из известных свойств функции Грина вытекает, что она сама и ее частные производные могут быть записаны в виде

$$G(x,\xi) = \frac{\alpha(x,\xi)}{|x\xi|^{n-2}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i(x,\xi)}{|x\xi|^{n-1}},$$

где α, α_i — равномерно непрерывные функции переменных x_i и ξ_k в области D.

Нам понадобится дальше следующее предложение.

Если функция $F(\xi)$ суммируема в степени $q > 1$, то выражение (44), а также

$$U_i = \int_D \frac{\partial G}{\partial x_i} F(\xi)\, d\xi \tag{45}$$

определены почти всюду, причем при $p \leq \frac{n}{n-2} q$ функция $|U|^p$ суммируема, а при $p \leq \frac{n}{n-1} q$ функция $|U_i|^p$ суммируема и

$$\int_D |U|^p dx < C_1 \int_D |F|^q dx, \quad \int_D |U_i|^p dx \leq C_2 \int_D |F|^q dx.$$

Это предложение непосредственно следует из следующей леммы:

ЛЕММА. *Пусть* $\alpha < n$, $q \geq 1$, $q \leq p < \frac{n}{\alpha} q$, *функция* $F(\xi)$ *определена и положительна в области* D *и* $|F|^q$ *суммируема и* $\Delta(x)$ — *подобласть* D, *зависящая от точки* x, *диаметр которой не превосходит* δ. *Тогда функция*

$$I(x) = \int_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)\, d\xi}{r^\alpha}, \quad r = |x\xi| \tag{46}$$

конечна почти всюду в D *и*

$$\int_D |I(x)|^p dx \leq C \delta^{n\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \alpha} \left(\int_D |F(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{47}$$

где C — *константа, зависящая от чисел* α, q, p, n.

Установим сначала неравенство (47) для ограниченной функции $F(\xi)$.

В этом случае $I(x)$ всюду конечна. В силу одной теоремы Рисса ([5]), функция

$$G(\alpha, \beta) = \operatorname{Max}_{F(\xi)} \frac{\int \left(\int_{\Delta(x)} \frac{|F(\xi)|}{r^\alpha} d\xi\right)^p dx}{\int_D |F(\xi)|^q d\xi}$$

есть логарифмически выпуклая функция переменных $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$ в треугольнике $0 \leq \alpha \leq \beta$, $0 \leq \beta \leq 1$, т. е. при $0 < t < 1$, $\alpha = \alpha_1 t + \alpha_2 (1-t)$, $\beta = \beta_1 t + \beta_2 (1-t)$ имеем

$$G(\alpha, \beta) \leq G^t(\alpha_1, \beta_1) \cdot G^{(1-t)}(\alpha_2, \beta_2).$$

Вычисляя пределы средних при $\alpha = \beta = 0$, получим

$$G(0,0) = \operatorname{Max}_{F(\xi)} \frac{\operatorname{Max}_x \int_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)\, d\xi}{r^\alpha}}{\operatorname{Max}_x F(x)} = \operatorname{Max}_x \int_{\Delta(x)} \frac{d\xi}{r^\alpha} \leq C_1 \delta^{n-\alpha}.$$

где C_1 зависит только от n и α. С другой стороны, в силу неравенства Hölder'а, при $\alpha p < n$

$$\int\limits_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)\,d\xi}{r^{\alpha}} \leqslant \left(\int\limits_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)\,d\xi}{r^{\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Delta(x)} F(\xi)\,d\xi\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

поэтому

$$\left[\int\limits_{D}\left(\int\limits_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)}{r^{\alpha}}\,d\xi\right)^{p} dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{D} F(\xi)\,d\xi\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[\int\limits_{D} dx \int\limits_{\Delta(x)} \frac{F(\xi)\,d\xi}{r^{\alpha p}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D} F\,d\xi \left[\operatorname*{Max}_{x} \int\limits_{D} \frac{d\xi}{r^{\alpha p}}\right]^{\frac{1}{p}} = C_2 \delta^{\frac{n}{p}-\alpha} \int\limits_{D} F(\xi)\,d\xi,$$

где C_2 зависит только от n, p и α. Полученное неравенство дает

$$G\left(\frac{1}{p}, 1\right) \leqslant C_2 \delta^{\frac{n}{p}-\alpha}.$$

В силу логарифмической выпуклости G, при $0 \leqslant \frac{1}{q} \leqslant 1$, $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} \geqslant \frac{n}{\alpha q}$

$$G\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \leqslant G^{1-\frac{1}{q}}(0,0)\, G^{\frac{1}{q}}\left(\frac{q}{p}, 1\right) \leqslant C_1^{1-\frac{1}{q}} C_2^{\frac{1}{q}} \delta^{n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\alpha}.$$

Правая часть этого неравенства конечна, так как $\alpha \frac{1}{q} < n$ и, следовательно, (47) доказано для ограниченной $F(\xi)$.

Пусть теперь $F(\xi)$ — функция с суммируемой q-ой степенью. Построим возрастающую последовательность ограниченных функций $F_n(\xi)$, сходящуюся в среднем степени q к $F(\xi)$.

В силу теоремы Лебега,

$$J_F(x) = \lim_{m \to \infty} J_{F_m}(x).$$

Так как последовательность J_{F_m} возрастает, неравенство (47) для F получается предельным переходом из соответствующего неравенства для F_m. В частности, отсюда вытекает, что функция $J_F(x)$ почти всюду конечна.

Обратимся теперь к рассмотрению системы уравнений (33).

Имея в виду ортогональность функций φ_j (35) и в силу формулы Грина

$$\int\limits_{D} u \sum_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k} p_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) dx = -\int\limits_{D} p_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx,$$

имеющей место для всякой функции u, удовлетворяющей соотношению (28), систему уравнений (33) запишем в виде

$$y_j^{(m)} = -\sum_{s=1}^{m} A_{js} y_s^{(m)} + f_j \qquad (48)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{js} &= \int\limits_D \Big(\sum_{(i)} a_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} + b\varphi_s\Big)\varphi_j\, dx, \\ f_j &= \int\limits_D f\varphi_j\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Система (39) является усечением бесконечной системы

$$y_j + \sum_{s=1}^{\infty} A_{js} y_s = f_j \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{50}$$

Рассмотрим преобразование в гильбертовом пространстве

$$Y_j = f_j - \sum_{s=1}^{\infty} A_{js} y_s \tag{51}$$

и докажем, что при $\sum y_j^2 < +\infty$ и

$$u_i = \sum y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad u = \sum y_j \varphi_j \tag{52}$$

из (51) следует, что Y_j есть коэффициент Фурье вектора

$$U_j = -\int\limits_D \frac{\partial G}{\partial x_j} \Big(\sum_{(i)} a_i u_i + bu - f\Big)\, dx. \tag{53}$$

В самом деле, полагая

$$U_j^{(m)} = -\int\limits_D \frac{\partial G}{\partial x_j} \Big(\sum_{(i)} a_i u_i^{(m)} + bu^{(m)} - f\Big)\, d\xi$$

$$u_i^{(m)} = \sum_{1}^{m} y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad u^{(m)} = \sum_{1}^{m} y_i \varphi_j.$$

В силу формулы Грина получим

$$Y_j^{(m)} = \int\limits_D \sum_{i,k} p_{ik} U_i^{(m)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\, d\xi = -\int\limits_D \varphi_j \Lambda(U)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_D \varphi_j \Big(\sum a_i u_i^{(m)} + bu^{(m)} - f\Big)\, d\xi = -\sum_{1}^{m} A_{js} y_s + f_j.$$

В силу доказанной леммы из сходимости в среднем рядов (52) вытекает сходимость в среднем $U_i^{(m)}$ к U_i и, следовательно, $Y_j^{(m)}$ сходится к коэффициенту Фурье вектора U_i. Заметим, что в смысле сходимости в среднем

$$U_i = \sum Y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

так как U_i приближается в среднем векторами $U_i^{(m)}$, являющимися градиентами непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе D.

Докажем теперь, что коэффициенты Фурье градиента решения уравнения (30) дают решение со сходящейся суммой квадратов системы (50) и, обратно, всякому решению системы (50) со сходящейся суммой квад-

ратов соответствуют решению уравнения (30), градиент которого определяется формулой

$$\operatorname{grad} u = \sum y_i \operatorname{grad} \varphi_j.$$

Пусть u — решение (30). Тогда в смысле сходимости в среднем

$$u = \sum y_j \varphi_j, \quad \operatorname{grad} u = \sum y_j \operatorname{grad} \varphi_j.$$

Решение u удовлетворяет соотношениям

$$\int_D [L(u) - f]\, \varphi_j\, dx = 0,$$

а применяя формулу Грина, получим

$$\int_D \left[\sum_{i,k} p_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \left(\sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu - f \right) \varphi_j \right] dx = 0;$$

подставляя сюда сходящиеся в среднем разложения u, $\operatorname{grad} u$, убедимся, что y_j удовлетворяют системе уравнений (50).

Обратно, если y_j есть решение системы (50) со сходящейся суммой квадратов, то, в силу того, что преобразование (51) равносильно (53) а также полагая

$$u_i = \sum y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad u = \sum y_j \varphi_j,$$

получаем почти всюду

$$u_j = -\int_D \frac{\partial G}{\partial x_j} \left(\sum a_i u_i + bu - f \right) dx; \tag{54}$$

аналогично докажем, что почти всюду

$$u = -\int_D G \left(\sum a_j u_j + bu - f \right) dx. \tag{55}$$

Функции $|u|^2$, $|u_i|^2$ интегрируемы, поэтому $F = \sum a_i u_i + bu - f$ имеет также интегрируемый квадрат. Из сделанного выше замечания следует, что как u, так и u_i интегрируемы в степени $p_1 = \frac{2n}{n-2}$. Применяя повторно это предложение, убедимся, что как u, так и u_i, а следовательно, и функция F интегрируемы в степени $p_1 > \frac{n}{n-1}$.

Но тогда, в силу неравенства Hölder'a

$$|u_i| \leqslant \left(\int_D \left| \frac{\partial G}{\partial x_j} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_D |F|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$|u| \leqslant \left(\int_D |G|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_D |F|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Имея в виду, что $\frac{p(n-1)}{p-1} < n$, заключаем, что u и u_i ограничены. Теперь из (54) следует, что u_i непрерывны, удовлетворяют условию

Hölder'а с любым дробным показателем и равны производным от u. В силу этого F непрерывна и удовлетворяет условию Hölder'а, а поэтому u удовлетворяет уравнению (30) и граничному условию (28).

Из доказанной эквивалентности задачи Дирихле для уравнения (30) и системы (50), в частности, следует совпадение собственных значений для системы (50) и уравнения (30).

Мы докажем теперь, что собственные значения системы (50) и его решения получаются предельным переходом от системы (48), причем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}|y_i-y_j^{(m)}|^2=0.$$

Отсюда, очевидно, будет следовать высказанное выше предложение о методе Галеркина.

Для установления этих свойств системы (50) достаточно показать, что преобразование (51) вполне непрерывно *, т. е. что из слабой сходимости $y(y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots)$ к нулю

$$\lim_{m\to\infty} y_j^{(m)}=0, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}|y_j^{(m)}|^2<M,$$

следует сильная сходимость к нулю последовательности $Y^{(m)}$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|Y_j^{(m)}|^2=0.$$

Числа $Y_j^{(m)}$ определяются как коэффициенты Фурье вектора $U_j^{(m)}$, определенного формулой (53), поэтому нам достаточно доказать, что из слабой сходимости к нулю функций $F_m(\xi)$,

$$\lim_{m\to\infty}\int_D F_m(\xi)\,g(\xi)\,d\xi=0, \qquad \int_D|F_m(\xi)|^2\,d\xi<M, \tag{56}$$

следует сходимость в среднем к нулю векторов

$$U_j^{(m)}=\int_D\frac{\partial G}{\partial x_j}F_m(\xi)\,d\xi.$$

Чтобы это усмотреть, сделаем прежде всего следующее замечание.

Если функция $H(x, \xi)$ равномерно непрерывна, когда x и ξ изменяются в D, то из (56) следует равномерная сходимость к нулю функций

$$h_m(x)=\int_D H(x, \xi)\,F_m(\xi)\,d\xi.$$

---

* Легко убедиться, что в случае уравнений с частными производными ряд $\sum|A_{js}|^2$, вообще говоря, уже не будет сходящимся. Для этого достаточно рассмотреть уравнение

$$\Delta\varphi+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

в квадрате $0<x,\ y<\pi$ и систему приближающих функций

$$\varphi_{m,n}=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sin nx\cdot\sin mx}{n^2+m^2}.$$

В самом деле, при любом E область D можно разбить на конечное число частей D_α так, чтобы для точки ξ, лежащей в D_α, удовлетворялось неравенство

$$|H(x, \xi) - H_\alpha(x)| < E, \qquad H_\alpha = H(x, \xi_\alpha),$$

где ξ_α — фиксированная точка D_α. Тогда

$$|h_m(x)| \leqslant E \int_D |F_m| dx + \sum_{(\alpha)} |H_\alpha(x)| \cdot \left| \int_{D_\alpha} F_m d\xi \right| \leqslant E \sqrt{M \cdot \text{объем}\, D} +$$

$$+ \max |H(x, \xi)| \cdot \sum_{(\alpha)} \left| \int_{D_\alpha} F_m d\xi \right|$$

и так как D_α не зависит от x, это показывает равномерную сходимость h_m к нулю.

В силу свойства функции Грина $G(x, \xi)$, отмеченных выше, мы можем ее производные представить в виде

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} = \alpha_j(x, \xi) + \beta_j(x, \xi),$$

причем слагаемые $\beta_j(x, \xi)$ равномерно непрерывны при изменении x, в области D, а первые слагаемые удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha_j(x, \xi)| < \frac{A}{|x\xi|^{n-1}}$$

и обращаются в нуль при

$$|x\xi| > \delta,$$

где δ сколь угодно мало. Тогда

$$U_j^{(m)} = \int_D \alpha_j(x, \xi) F_m(\xi) d\xi + \int_D \beta_j(x, \xi) F_m(\xi) d\xi.$$

Первые слагаемые этих выражений $\overline{U}^{(m)}(x)$ в силу нашей леммы удовлетворяют неравенствам

$$\left[\int_D |\overline{U}_j^{(m)}|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < CA\delta \left[\int_D |F|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

и, следовательно,

$$\int_D |\overline{U}_j^{(m)}|^2 dx \leqslant (CA\delta)^2 M.$$

Вторые слагаемые, в силу слабой сходимости к нулю последовательности $F_m(\xi)$ и равномерной непрерывности ядер $\beta_j(x, \xi)$, равномерно сходятся к нулю.

Так как δ может быть выбрано как угодно малым, это доказывает сильную сходимость $U_j^{(m)}$ к нулю.

Поступило
31 III 1942.

M. KELDYCH. ON GALERKIN'S METHOD OF SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS

SUMMARY

In 1915 B. Galerkin proposed a method of solution of boundary problems for ordinary differential equations. At it was revealed afterwards, in the case of problems of the variational calculus this method coincides essentially with Rietz's method. But Galerkin's method does not depend on the variational character of problems and may therefore be applied to non-selfadjoint equations.

In the present paper we prove the applicadility of the method to some classes of differential equations.

In § 1 we consider the general ordinary differential equation of order 2n. § 2 contains a detailed investigation of all boundary conditions imposed on the values of the function and of its derivative at each end-point of the interval for equation of 2nd order. In § 3 we consiuer the Dirichlet's problem for the equations with partial derivatives. The convergence (in the mean) of the solutions and the convergence of the proper values are stablished in the general case.

DATE DUE
